

Ein linearer Programmierungsansatz zur Lösung von Stopp- und Steuerungsproblemen

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum politicarum
(Doktor der Wirtschaftswissenschaft)
im Fach Operations Research

eingereicht an der
Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Humboldt-Universität zu Berlin

von
Herrn Dipl.-Math. Stefan Röhl
geboren am 22. Juni 1968 in Berlin

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin:
Prof. Dr. Jürgen Mlynek

Dekan der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät:
Prof. Dr. Lutz Hildebrandt

Gutachter:

1. Prof. Dr. Kurt Helmes
2. Prof. Dr. Andreas Brandt

eingereicht am:	20. März 2001
Tag der mündlichen Prüfung:	8. Mai 2001

Abstract

We present an approach to, and an algorithm for solving optimal stopping problems. The approach is based on a dual formulation of the classical method for solving stopping problems using variational inequalities. Under suitable conditions it is possible to express the dual formulation as an infinite-dimensional linear program. This linear program uses the moments of the occupation measure and the moments of the stopping measure as variables.

We formulate and solve finite-dimensional approximations to this infinite-dimensional program by restricting the number of moments. The accuracy of the numerical results depend on how well the support of the stopping measure can be identified. To this end we develop an iterative procedure which works very well in many cases.

In the second part of the dissertation we show how the algorithm, developed for stopping problems, can be used for solving stochastic control problems.

Keywords:

stopping problem, linear programming, stochastic control, Hausdorff moment problem

Zusammenfassung

Es wird ein Ansatz und ein Algorithmus zur Lösung von stochastischen Stoppproblemen vorgestellt, der auf einer dualen Formulierung zum klassischen Lösungsansatz für Stoppprobleme mittels Variationsungleichungen basiert. Unter bestimmten Voraussetzungen kann man für diese duale Formulierung ein äquivalentes unendlichdimensionales lineares Programm aufstellen, das die Momente des Aufenthaltsmaßes des stochastischen Prozesses bis zum Stoppzeitpunkt und die Momente der Verteilung des Prozesses zum Zeitpunkt des Stoppens als Variablen enthält.

Für dieses unendlichdimensionale Problem werden endlichdimensionale Approximationen formuliert und gelöst, wobei die Momente nur bis zu einer endlichen Ordnung berücksichtigt werden. Die Güte der numerischen Resultate hängt davon ab, wie genau der Träger des Maßes zum Stoppzeitpunkt identifiziert werden kann. Aus diesem Grund wird ein Verfeinerungsalgorithmus entwickelt, mit dem diese Identifizierung in einer Reihe von Fällen gelingt und sich sehr genaue Ergebnisse erzielen lassen.

Der für Stoppprobleme entwickelte Algorithmus kann auch bei der Ermittlung von optimalen Steuerungen für stetige stochastische Prozesse angewandt werden. Für einzelne Beispiele wird gezeigt, welche Resultate dabei erzielt werden können.

Schlagwörter:

Stoppproblem, Lineare Programmierung, Stochastische Steuerung, Hausdorffsches Momentenproblem

Vorbemerkungen

In der vorliegenden Dissertation wird ein neuer Lösungsansatz für stochastische Stopp- und Steuerungsprobleme vorgestellt. Die dafür benötigten theoretischen Resultate werden vollständig dargestellt. Auf den Beweis bekannter Aussagen wird dabei durchgängig verzichtet und nur entsprechende Quellen angegeben. Damit wird gleichzeitig erkennbar, worin der Beitrag des Autors an der entwickelten Theorie liegt. Die Schwerpunkte bilden dabei die Darstellung des dualen Paares von Optimierungsproblemen für Stoppprobleme im Abschnitt 1.2, insbesondere die Aussage und der Beweis von Satz 1.1 sowie die geometrischen Überlegungen zu den Momentenräumen und Hausdorffpolytopen, insbesondere für den höherdimensionalen Fall im Abschnitt 1.7.

Einen größeren Raum in der Arbeit nimmt der Algorithmus selbst ein. In der Reihenfolge und Art der Darstellung spiegelt sich z. T. der Entwicklungsprozess des Algorithmus wider, insbesondere in den Abschnitten 1.3 bis 1.8. Bei der Wahl der Beispiele wurde die Auswahl zugunsten einer detaillierteren Darstellung einiger prägnanter Beispiele eingeschränkt. Jedes vorgestellte Beispiel dient gleichzeitig dazu, einen bestimmten Aspekt des Verfahrens darzustellen oder Modifikationen zu motivieren. Für zwei der Beispiele wurden in den Anhängen zusätzlich die Quelltexte angegeben. Diese dienen in erster Linie als Demonstration dafür, dass die Modellierungssprache AMPL sehr gut für die Formulierung der auftretenden linearen Programme geeignet ist. Der angegebene MATLAB-Quelltext soll verdeutlichen, welche Mühe auch die Lösung der primalen Optimierungsaufgabe für Stoppprobleme bereitet. Diese Quelltexte bilden insgesamt allerdings nur einen Ausschnitt der entwickelten Programme.

Beiden Kapiteln der Arbeit sind gesonderte Einleitungen vorangestellt. Neben einer kurzen allgemeinen Einführung wird dort auch auf relevante einführende Literatur verwiesen. Dabei wurde jedoch aus der Vielzahl der vorliegenden Arbeiten nur eine sehr kleine Auswahl getroffen. Die ausgewählten Arbeiten eignen sich jedoch sehr gut als weiterführende Quellen.

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die mich bei der Entstehung dieser Arbeit durch ihre Anregungen und Diskussionen unterstützt haben. Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Prof. Dr. Kurt Helmes, der mein Dissertationsvorhaben mit großem Interesse verfolgt hat und der mir in der fachlichen Diskussion oft rasch und unkompliziert zur Seite stand. Sowohl ihm als auch Herrn Prof. Dr. Andreas Brandt danke ich für die zügige und sorgfältige Begutachtung meiner Dissertation.

Inhaltsverzeichnis

1	Der lineare Programmierungsansatz zur Lösung von Stopp Problemen	7
1.1	Einführung	7
1.2	Die primale und die duale Formulierung für das Stopp Problem	9
1.3	Das lineare Programm zum dualen Ansatz	17
1.3.1	Weitere Voraussetzungen	17
1.3.2	Der Diskretisierungsansatz	19
1.3.3	Das unendlichdimensionale lineare Programm	22
1.3.4	Approximation durch endlichdimensionale lineare Programme	26
1.3.5	Ein erstes eindimensionales Beispiel	28
1.4	Die Verfeinerung des Algorithmus im eindimensionalen Fall	35
1.4.1	Hausdorffpolytope und Rücktransformation	35
1.4.2	Die Anwendung der Rücktransformation	40
1.4.3	Die Verfeinerung für das Einführungsbeispiel	42
1.5	Die Berücksichtigung von Verlaufsgewinnen	48
1.5.1	Konstante Verlaufsgewinne	48
1.5.2	Verlaufskosten höherer Ordnung	57
1.6	Stopp Probleme für das Cox–Ingersoll–Ross Modell	58
1.6.1	Das Modell und erste numerische Resultate	58
1.6.2	Weitere Testfunktionen im verfeinerten linearen Programm	61
1.7	Höherdimensionale Hausdorffpolytope und Rücktransformation	65
1.8	Ein zweidimensionales Beispiel	69

1.8.1	Die Gewinnung von Vergleichswerten	70
1.8.2	Numerische Resultate mit dem LP-Ansatz	72
1.8.3	Modifikation des Beispieles	77
1.9	Schlussbemerkungen zu Stopp-problemen	80
2	Die Anwendung des LP-Ansatzes auf Steuerungsprobleme	83
2.1	Einführung	83
2.2	Das Beneš–Hilborn Problem	86
2.2.1	Einleitung und Modell	86
2.2.2	Die optimale Steuerung und die numerischen Resultate	89
2.3	Ein Beispiel zur Portfoliooptimierung	94
2.3.1	Das Modell und das resultierende lineare Programm	94
2.3.2	Die exakte Lösung und numerische Resultate für das lineare Programm .	97
A	AMPL-Files für die Verfeinerung des Einführungsbeispieles	102
B	AMPL-Modellfile für die Modifikation im Cox–Ingersoll–Ross Modell	105
C	MATLAB-File zur Lösung des Neumannproblems	109
	Symbolverzeichnis	111
	Literaturverzeichnis	112

Abbildungsverzeichnis

1.1	Numerische Resultate für die Zielfunktionswerte mit iterierten Differenzen bei maximaler Ordnung $M = 30$	32
1.2	Resultat der Rücktransformation für die numerischen Werte der Momente des Aufenthaltsmaßes μ bei $M = 20$	43
1.3	Numerische Resultate für die Zielfunktionswerte nach der 5. Iteration im verfeinerten linearen Programm bei maximaler Ordnung $M = 15$	47
1.4	Numerische Resultate der Rücktransformation $R^{(20)}$ angewandt auf die exakten ersten 20 Momente von μ_τ	48
1.5	Die Zielgewinnfunktion G und optimalen Gewinnfunktionen v_1 für die Grenzfälle $q = 3.5$ und $q = -12.5$	49
1.6	Die veränderte Zielgewinnfunktion G und optimalen Gewinnfunktionen v_1 für die Fälle $q = 0.0$ und $q = -8.0$	55
1.7	Die Zielgewinnfunktion G und die optimale Gewinnfunktion v_1 für die Parameter $a = 1$, $b = -1$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0.3$ und $x_1 = 0.2$	63
1.8	Lösung des Dirichletproblems für den oben vorausgesetzten Stoppbereich \tilde{S} . . .	72
1.9	Die Punkte $x_0 \in E$, die durch den LP-Ansatz als Elemente des Stoppbereiches S identifiziert werden.	78

Tabellenverzeichnis

1.1	Numerische Resultate für $x_0 = 0.3$ bei Verwendung der Binomialkoeffizienten . . .	30
1.2	Numerische Resultate für $x_0 = 0.3$ bei Verwendung der iterierten Differenzen . . .	30
1.3	Numerische Resultate für $x_0 = 0.3$ bei Verwendung der iterierten Differenzen und der reduzierten Hausdorffbedingungen	31
1.4	Konditionszahlen der Matrizen die sich aus allen Hausdorffbedingungen sowie den reduzierten Hausdorffbedingungen mit den iterierten Differenzen ergeben	32
1.5	Numerische Resultate und exakte Werte für die Momente von μ_τ und μ bis zur Ordnung 20 bzw. 18 für den Startwert $x_0 = 0.3$	34
1.6	Rücktransformation der numerischen Werte für die Momente von μ_τ und μ bis zur Ordnung 20 bzw. 18 für den Startwert $x_0 = 0.3$	42
1.7	Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen sowie die Konditionszahl für verschiedene Ordnungen M im verfeinerten linearen Programm	44
1.8	Zielfunktionswert und die Verteilung der Masse auf die Teilmaße $\mu_\tau^{(j)}$ für verschiedene Ordnungen M im verfeinerten linearen Programm	45
1.9	Die Ordnung M , die Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen sowie die Konditionszahl der Matrix B	46
1.10	Zusammenfassung der weiteren Iterationen	46
1.11	Numerische Resultate nach der 5. Iteration für die Momente von $\mu_\tau^{(j)}$ und μ sowie die exakten Momente von μ_τ und μ	47
1.12	Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen für $q = 3.51$	51
1.13	Massenverteilung und Rücktransformation der Iterationen für $q = 3.51$	51
1.14	Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen für $q = 3.49$	52
1.15	Massenverteilung und Rücktransformation der Iterationen für $q = 3.49$	52
1.16	Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen für $q = -12.49$	53
1.17	Massenverteilung und Rücktransformation der Iterationen für $q = -12.49$	53

1.18	Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen für $q = -12.51$	54
1.19	Massenverteilung und Rücktransformation der Iterationen für $q = -12.51$	54
1.20	Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen für $q = 0.0$	56
1.21	Massenverteilung und Rücktransformation der Iterationen für $q = 0.0$	56
1.22	Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen für $q = -8.0$	57
1.23	Massenverteilung und Rücktransformation der Iterationen für $q = -8.0$	57
1.24	Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen bei quadratischem Verlaufsgewinn	58
1.25	Massenverteilung und Rücktransformation für die einzelnen Iterationen bei quadratischem Verlaufsgewinn	58
1.26	Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen für $a = 1$, $b = -1$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0.3$ und $x_1 = 0.2$	60
1.27	Massenverteilung und Rücktransformation für die einzelnen Iterationen für $a = 1$, $b = -1$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0.3$ und $x_1 = 0.2$	60
1.28	Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen für $a = 1$, $b = -1$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0.3$ und $x_1 = 0.2$	62
1.29	Massenverteilung und Rücktransformation für die einzelnen Iterationen für $a = 1$, $b = -1$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0.3$ und $x_1 = 0.2$	62
1.30	Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen für $a = 1$, $b = 7$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0.8$ und $x_1 = 0.2$	63
1.31	Massenverteilung und Rücktransformation für die einzelnen Iterationen für $a = 1$, $b = 7$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0.8$ und $x_1 = 0.2$	63
1.32	Die Teilungspunkte s_i für die einzelnen Iterationen für $a = 0$, $b = -1$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0.3$ und $x_1 = 0.289195$	64
1.33	Massenverteilung und Rücktransformation der einzelnen Iterationen für $a = 0$, $b = -1$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0.3$ und $x_1 = 0.289195$	64
1.34	Numerische Resultate für $x_0 = (0.3, 0.3)$ bei Verwendung der iterierten Differenzen	73
1.35	Rücktransformation für μ_τ bei $M = 10$ (multipliziert mit 10^3)	74
1.36	Numerische Resultate für $x_0 = (0.3, 0.3)$ im zweiten Schritt für Unterteilung bei $0.1, 0.3, 0.7$ und 0.9	74
1.37	Massenverteilung auf die Teilmaße $\mu_\tau^{(j_1, j_2)}$ bei $M = 8$ im zweiten Schritt	74
1.38	Rücktransformation für $\tilde{\mu}_\tau^{(3,3)}$ bei $M = 8$ im zweiten Schritt	75
1.39	Zusammenfassung des weiteren Verlaufs der Verfeinerung	75

1.40	Massenverteilung auf die Teilmaße $\mu_{\tau}^{(j_1, j_2)}$ bei $M = 8$ im 5. Schritt	76
1.41	Massenverteilung auf die Teilmaße $\mu_{\tau}^{(i, j)}$ für $M = 7$ und Unterteilung bei 0.01, 0.33, 0.67 und 0.99	76
1.42	Massenverteilung auf die Teilmaße $\mu_{\tau}^{(i, j)}$ für $M = 8$ und Unterteilung bei 0.01, 0.33, 0.67 und 0.99	76
1.43	Zusammenfassung des Verlaufs der Verfeinerung	79
1.44	Massenverteilung auf die Teilmaße $\mu_{\tau}^{(i, j)}$ im 5. Schritt für $M = 8$	79
1.45	Massenverteilung auf die Teilmaße $\mu_{\tau}^{(i, j)}$ im 5. Schritt für $M = 9$	79
1.46	Zielfunktionswert und mittlere Austrittszeiten für verschiedene Startwerte x_0 und die Ordnung $M = 9$	80
2.1	Zielfunktionswerte und Massenverteilung für $\lambda = 0.2$ und verschiedene Ordnungen N und L	90
2.2	Zielfunktionswerte und Massenverteilung analog zu Tabelle 2.1 mit der Bedingung $p_{-1} = p_1$	91
2.3	Rücktransformation $R^{(10, 10)}$ angewandt auf das Ergebnis für $\mu^{(1, 2)}$ mit $\lambda = 0.2$, $N = 10$ und $L = 10$	91
2.4	Rücktransformation $R^{(10, 10)}$ angewandt auf das Ergebnis für $\mu^{(2, 1)}$ mit $\lambda = 0.2$, $N = 10$ und $L = 10$	92
2.5	Maximale Ordnungen und Teilungspunkte für $E \times \mathcal{U}$ in den weiteren Schritten für $\lambda = 0.2$	93
2.6	Zielfunktionswerte und Massenverteilung in den weiteren Schritten für $\lambda = 0.2$.	93
2.7	Zielfunktionswerte und Massenverteilung für $b = 0.25$, $x_0 = 0.5$, $K = 1$ und verschiedene Ordnungen M , N und L	98
2.8	Zielfunktionswerte und Massenverteilung für $b = 0.25$, $x_0 = 0.5$, $K = 1$ und verschiedene Ordnungen M , N und L bei nichtnegativer Steuerung \tilde{u}	99
2.9	Rücktransformation $R^{(7, 7, 7)}(\mu^{(+)})_{m, n, l}$ für $m = 0$	99
2.10	Rücktransformation $R^{(7, 7, 7)}(\mu^{(+)})_{m, n, l}$ für $m = 3$	100
2.11	Zielfunktionswerte und Massenverteilung für $b = 0.25$, $x_0 = 0.5$, $M = 7$, $N = 7$, $L = 7$ und verschiedene Grenzen K bei nichtnegativer Steuerung \tilde{u}_t	100

Kapitel 1

Der lineare Programmierungsansatz zur Lösung von Stoppproblemen

1.1 Einführung

Oft steht man vor der Situation, einen zufälligen Prozess zu beobachten, ohne ihn selbst beeinflussen zu können, um dann zu einem selbstgewählten Zeitpunkt eine einmalige und unumkehrbare Entscheidung zu treffen, die dann mit bestimmten Kosten oder Gewinnen verbunden ist. Das Problem besteht darin, diese Entscheidung so zu treffen, dass der Gewinn für den Entscheidungsträger maximiert wird bzw. er seinen Verlust minimiert.

Eine derartige Konstellation ergibt sich z. B. beim Handel mit Wertpapieren. Der Kleinanleger hat selbst keine Möglichkeit, Einfluss auf den Kurs eines Wertpapiers zu nehmen, er kann aber die Entscheidung treffen, wann er ein Wertpapier am Markt kauft oder verkauft und damit seinen Gewinn bzw. Verlust beeinflussen. Eine solche Entscheidung ist dann in gewisser Weise unumkehrbar. Sie hat allerdings meist zur Folge, dass eine erneute Beobachtung des Marktes erfolgt, dann aber unter veränderter Sicht des Anlegers. So kann es ihm nun möglicherweise um einen Verkauf seiner gerade erworbenen Wertpapiere gehen.

Ähnliche Situationen ergeben sich bei konkreten Investitionsentscheidungen. Ein Unternehmen steht vor der Entscheidung, an einem bestimmten Standort eine Investition zu tätigen oder nicht. Dazu führt es verschiedene Untersuchungen zu den Marktbedingungen, zur Situation des Arbeitsmarktes vor Ort, zum politischen Umfeld usw. durch. Nun steht das Unternehmen im Wesentlichen zu jedem Zeitpunkt der Untersuchungen vor drei möglichen Entscheidungen, und zwar die Untersuchungen abubrechen und die Investition nicht vorzunehmen, die Untersuchungen zu beenden und sich zu entschließen, die Investition zu tätigen oder aber die Untersuchungen fortzusetzen und die Entscheidung über die Investition zu einem späteren Zeitpunkt zu treffen. Hier besteht der zufällige Prozess, der beobachtet wird, nicht nur aus dem sich zufällig entwickelnden Umfeld, sondern auch aus der sich mit der Zeit ansammelnden Information. Diese Beschreibung ist allerdings hier stark vereinfacht, da natürlich auch während des Verlaufs der Untersuchungen konkrete Entscheidungen zum Umfang und zur Art weiterer Analysen getroffen werden können.

Grundsätzlich ist jedoch damit eine Situation angesprochen, wie sie auch häufig bei statistischen Fragestellungen auftritt. Hier hat sich aufbauend auf die Untersuchungen von A. Wald (vgl. z. B.

[49]) das Gebiet der sequentiellen Analyse entwickelt. Im Gegensatz zur sogenannten klassischen Statistik ist dabei die Länge einer Versuchsreihe nicht von vornherein festgelegt, diese hängt vielmehr von den gesammelten Beobachtungen selbst ab. So wird z. B. eine Hypothese genau dann angenommen, wenn eine statistische Kenngröße, die aus den bisherigen Beobachtungen gebildet wird, einen bestimmten Schwellenwert überschreitet.

Probleme, wie sie im ersten Absatz beschrieben werden, lassen sich oft sehr gut als stochastische Stoppprobleme beschreiben. Dabei wird der Zeitpunkt, zu dem die Entscheidung gefällt wird, als Stoppzeitpunkt für den beobachteten Prozess interpretiert. Diese Modellierung erscheint insbesondere dann sinnvoll, wenn der beobachtete Prozess nach der Entscheidung wirklich zum Erliegen kommt (weil z. B. die Entscheidung darin bestand, einen Motor auszuschalten) oder für das handelnde Subjekt nicht mehr von Interesse ist. Die Problemstellung ist damit das Finden einer optimalen Stoppregel für das stochastische Stoppproblem.

Die Untersuchung von stochastischen Stoppproblemen geht zurück auf die oben beschriebenen Fragestellungen aus der Statistik. Später traten auch Problemstellungen aus anderen Gebieten hinzu. Insbesondere Anwendungen aus dem Bereich der Finanzmärkte haben die Entwicklung von Stoppproblemen für die Klasse der Diffusionsprozesse forciert. Diese Klasse bildet den Schwerpunkt in dieser Arbeit.

Einen sehr guten Überblick über die Theorie des optimalen Stoppens gibt das Buch von A. Shiryaev [44]. Einen sehr prägnanten Abschnitt zu Stoppproblemen enthält auch das Buch von B. Øksendahl [43].

Im Zentrum der bisherigen Untersuchungen steht dabei der Ansatz, die optimale Gewinnfunktion v_1 zu charakterisieren. Mit Hilfe der für diese Funktion gefundenen Eigenschaften versucht man, die optimale Gewinnfunktion v_1 zu ermitteln. Aufgrund der Kenntnis von v_1 ist man dann in der Lage, eine optimale Stoppregel für das Problem abzuleiten. Hier gibt es nun verschiedene konstruktive Methoden, aber auch analytische Verfahren, die u. a. auf die Lösung von Variationsungleichungen und freie Randwertprobleme hinauslaufen. Die beiden oben angegebenen Bücher sind für diesen Ansatz insgesamt gute Quellen.

In der vorliegenden Arbeit wird jedoch ein prinzipiell anderer Ansatz verfolgt. Dabei geht es um die Charakterisierung der mit dem beobachteten Prozess und der Stoppregel verbundenen Maße auf dem Zustandsraum des Prozesses. Aus der Kenntnis dieser Maße wird dann eine optimale Stoppregel abgeleitet. Dieser Ansatz geht auf eine Martingalformulierung zurück, wie sie für Steuerungsprobleme bereits bekannt ist¹ und wurde parallel zu dieser Arbeit auch in der Dissertation von Cho [9] entwickelt. Allerdings unterscheidet sich die Arbeit von Cho [9] sowohl bei der Schwerpunktsetzung in den theoretischen Untersuchungen als auch beim numerischen Algorithmus von der vorliegenden Arbeit. Auf die in Cho [9] vorgeschlagene Diskretisierung wird in Abschnitt 1.3.2 noch genauer eingegangen.

Im Abschnitt 1.2 werden diese beiden Ansätze als ein Paar dualer Optimierungsprobleme charakterisiert. Dabei wird der oben zuerst beschriebene (klassische) Ansatz als primales Problem und der zweite Ansatz, der hier verfolgt wird, als duales Problem bezeichnet. Das grundlegende Ergebnis im Abschnitt 1.2 ist die Tatsache, dass zwischen beiden Problemen keine Dualitätslücke existiert.

Den Schwerpunkt des 1. Kapitels bildet der numerische Algorithmus, der auf dem dualen Problem aufbaut und der die Lösung eines linearen Programmes mit den Momenten der beiden

¹Für detailliertere Informationen und Literaturangaben wird auf die Einleitung zu Kapitel 2 verwiesen.

oben genannten Maße als Variablen erfordert. Die Grundidee für diesen Algorithmus wird im Abschnitt 1.3 vorgestellt. Da die erste direkte Formulierung des linearen Programmes nur sehr unbefriedigende Ergebnisse liefert, werden im Abschnitt 1.4 weitere Überlegungen, insbesondere zur Geometrie des Problems, angestellt. Diese erlauben eine Verfeinerung des Algorithmus, die für das Einführungsbeispiel sehr gute Resultate liefert. Im Abschnitt 1.5 werden weitere Beispiele betrachtet, dabei werden auch Verlaufs-kosten bzw. -gewinne im Stoppproblem berücksichtigt. Damit ist man in der Lage, auch kritische Grenzfälle zu untersuchen.

Das in Abschnitt 1.6 betrachtete Beispiel für die Entwicklung der kurzfristigen Zinsrate ist aus Sicht wirtschaftswissenschaftlicher Anwendungen interessant und erlaubt gleichzeitig die Vorstellung einer weiteren Modifikation des Algorithmus. Die beiden auf 1.6 folgenden Abschnitte beschäftigen sich mit der Anwendung des Algorithmus auf höherdimensionale Probleme. Dazu werden im Abschnitt 1.7 die theoretischen Ergebnisse aus Abschnitt 1.4 auf höhere Dimensionen übertragen, im Abschnitt 1.8 folgen dann die Beispiele. Im Abschnitt 1.9 finden sich einige abschließende Bemerkungen zu Stopp-problemen und zum vorgestellten Algorithmus.

1.2 Die primale und die duale Formulierung für das Stoppproblem

Auf einem gegebenen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ sei $\mathfrak{X} = \{X_t\}_{t \in I}$ ein \mathcal{F}_t -adaptierter stochastischer Prozess mit kompaktem, zusammenhängendem Zustandsraum $E \subseteq \mathbb{R}^N$ und Zeitintervall $I = [0, \infty)$. Der Prozess \mathfrak{X} erfülle die folgenden Voraussetzungen (1.1)(i) bis (1.1)(iv):

- (i) \mathfrak{X} ist ein stetiges Semimartingal.
- (ii) \mathfrak{X} ist ein homogener Markovprozess.
- (iii) Es ist $\mathbf{E} L_E^x < \infty$ für alle $x \in E$, wobei L_E^x die Austrittszeit von \mathfrak{X} aus dem Innern von E bei Start in x ist, d.h. (1.1)

$$L_E^x(\omega) = \inf \{t > 0 \mid X_t(\omega) \notin \text{int } E\}.$$

- (iv) Der Prozess \mathfrak{X} wird am Rand ∂E von E absorbiert.

Bemerkung: Von diesen Voraussetzungen ist insbesondere die Voraussetzung (1.1)(iii) zu berücksichtigen. Während z.B. für den Standard-Wienerprozess diese Voraussetzung für jedes beschränkte E erfüllt ist, gilt dies nicht für die Standard-geometrische Brownsche Bewegung auf dem Intervall $E = [0, 1]$.

Sei $\mathfrak{T} = \{T_s\}_{s \geq 0}$ die zugehörige Halbgruppe von Kontraktionen, d.h.

$$(T_s(f))(x) := \mathbf{E}_x(f(X_s)) \quad \text{für } f \in \mathcal{B}(E),$$

wobei $\mathcal{B}(E)$ die Menge aller beschränkten borelmessbaren Funktionale f auf E ist und $\mathbf{E}_x(\cdot) := \mathbf{E}(\cdot | X_0 = x)$. Der infinitesimale Generator von \mathfrak{T} bzw. \mathfrak{X} sei mit A bezeichnet und sein Definitionsbereich mit $\mathcal{D}(A)$, d.h. für $f \in \mathcal{D}(A)$ existiert der nachfolgende Grenzwert für alle $x \in E$

und es ist

$$(Af)(x) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{(T_t(f))(x) - f(x)}{t}.$$

Für den Operator A wird die folgende Voraussetzung (1.2) gefordert:

$$\text{Es gilt } C^\infty(E) \subset \mathcal{D}(A). \quad (1.2)$$

Bemerkung: Für Diffusionsprozesse auf E ist diese Voraussetzung erfüllt. Dabei werden hier und im Weiteren Diffusionsprozesse gemäß Strook und Varadhan [47] mit Hilfe der Existenz zugehöriger Diffusionsmaße auf dem Raum der stetigen Funktionen auf E definiert.

Für ein festes $x_0 \in E$ betrachten wir das folgende Stoppproblem :

$$\sup \left\{ \mathbf{E}_{x_0} \left[G(X_\tau) + \int_0^\tau Q(X_t) dt \right] \mid \tau \text{ } \mathcal{F}_t\text{-Stoppzeit mit } \mathbf{E} \tau < \infty \right\} =: v_1(x_0), \quad (1.3)$$

wobei G und Q gegebene reellwertige stetige Funktionen auf E sind. Die Funktion G kann dabei als der Zielgewinn zum Stoppzeitpunkt τ und die Funktion Q als laufender Gewinn bis zum Stoppzeitpunkt τ angesehen werden. Für ein gegebenes $x_0 \in E$ sind wir an einer Stoppzeit τ^* interessiert für die $\mathbf{E} \tau^* < \infty$ und $\mathbf{E}_{x_0} \left[G(X_{\tau^*}) + \int_0^{\tau^*} Q(X_t) dt \right] = v_1(x_0)$ gilt.

Wir betrachten zwei Probleme, die mit dem Stoppproblem (1.3) verbunden sind. Das erste Problem, primales Problem genannt, lautet

$$\inf_{u \in \mathcal{D}(A)} \{ u(x_0) \mid u \geq G, \quad Au + Q \leq 0 \} =: v_2(x_0), \quad (1.4)$$

das zweite Problem, als duales Problem bezeichnet, ist

$$\sup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}^+(E), \\ \mu_\tau \in \mathcal{P}(E)}} \left\{ \int_E G(x) d\mu_\tau(x) + \int_E Q(x) d\mu(x) \mid \mu_\tau - \delta_{x_0} = A^* \mu \right\} =: v_3(x_0). \quad (1.5)$$

Hierbei bezeichnet A^* den formal definierten adjungierten Operator von A , d.h.

$$\langle A^* \mu, f \rangle := \langle Af, \mu \rangle = \int_E (Af)(x) d\mu(x) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{D}(A), \mu \in \mathcal{M}(E). \quad (1.6)$$

Darüber hinaus ist $\mathcal{M}(E)$ die Menge aller signierten endlichen Maße, $\mathcal{M}^+(E)$ die Menge aller endlichen Borelmaße, $\mathcal{P}(E)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf E und $\delta_{x_0} \in \mathcal{P}(E)$ das Dirac-Maß im Punkt x_0 . Die Gleichungsnebenbedingung in Problem (1.5) bedeutet hier, dass

$$\int_E f(x) d\mu_\tau(x) - f(x_0) = \int_E Af(x) d\mu(x) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{D}(A)$$

gilt. Das Maß μ kann als Aufenthaltsmaß des gestoppten Prozesses $\{X_t\}_{t \leq \tau}$, d.h.

$$\mu(H) = \mathbf{E} \left[\int_0^\tau \mathbb{1}_H(X_t) dt \right] \quad \text{für alle borelmessbaren Mengen } H \subset E \quad (1.7)$$

und μ_τ als das Bildmaß von X_τ interpretiert werden. Mit $\mathbb{1}_H$ bezeichnen wir die Indikatorfunktion auf H .

Zunächst soll eine formale Rechtfertigung für die Begriffe primales Problem und duales Problem für (1.4) bzw. (1.5) gegeben werden. Problem (1.5) kann in Kurzschreibweise wie folgt geschrieben werden:

$$\sup_{\mu_\tau, \mu \in \mathcal{M}(E)} \{ \langle G, \mu_\tau \rangle + \langle Q, \mu \rangle \mid \mu_\tau - A^* \mu = \delta_{x_0}, \langle \mathbb{1}, \mu_\tau \rangle = 1, \mu, \mu_\tau \geq 0 \},$$

wobei das in (1.6) definierte Skalarprodukt verwendet wird. Für $\mu \in \mathcal{M}(E)$ bedeutet dabei die Schreibweise $\mu \geq 0$, dass $\mu \in \mathcal{M}^+(E)$ gilt. Wendet man nun die formalen Regeln für die Bildung des dualen Programmes bei endlichdimensionalen linearen Programmen an, so erhält man

$$\inf_{\substack{\alpha \in \mathbb{R} \\ \tilde{u} \in \mathcal{D}(A)}} \{ \langle \tilde{u}, \delta_{x_0} \rangle + \alpha \mid -A\tilde{u} \geq Q, \tilde{u} + \alpha \geq G \}, \quad (1.8)$$

wobei α der Lagrange-Multiplikator der Nebenbedingung $\langle \mathbb{1}, \mu_\tau \rangle = 1$ ist. Man beachte dabei, dass (1.8) nur formal gerechtfertigt ist, da hier keinerlei Aussagen über die Dualität von $\mathcal{M}(E)$ und $\mathcal{D}(A)$ gemacht werden. Wir definieren $u(x) = \tilde{u}(x) + \alpha$ und schreiben (1.8) als

$$\inf_{\substack{\alpha \in \mathbb{R} \\ u \in \mathcal{D}(A)}} \{ u(x_0) \mid Au - A\alpha + Q \leq 0, u \geq G \}. \quad (1.9)$$

Problem (1.9) ist äquivalent zu Problem (1.4), da $A\alpha \equiv 0$ (man stelle sich α als eine konstante Funktion vor).

Der folgende Satz besagt nun, dass zwischen den Problemen (1.4) und (1.5) keine „Dualitätslücke“ existiert.

Satz 1.1 :

Sei \mathfrak{X} ein stochastischer Prozess, der die Voraussetzungen (1.1) und (1.2) erfüllt. Seien weiterhin $x_0 \in E$ ein gegebener Startpunkt des Prozesses \mathfrak{X} sowie G und Q stetige Funktionen $E \rightarrow \mathbb{R}$. Dann haben die Probleme (1.3) und (1.5) Lösungen, d.h. es existieren eine Stoppzeit τ^ und ein Paar von Maßen (μ, μ_τ) für die die optimalen Werte angenommen werden. Darüber hinaus gilt*

$$v_1(x_0) = v_2(x_0) = v_3(x_0).$$

Beweis:

Wir beweisen zuerst die Aussage des Satzes für den Fall $Q \equiv 0$. Im zweiten Teil wird dann die Verallgemeinerung für beliebiges Q gezeigt.

I. Die Voraussetzung, dass der Zustandsraum E beschränkt ist, wird hier zunächst fallen gelassen. Für die Funktion G wird jedoch Lipschitzstetigkeit verlangt.

Es werden die folgenden drei Ungleichungen bewiesen:

- $v_2(x_0) \leq v_1(x_0)$,
- $v_1(x_0) \leq v_3(x_0)$ und
- $v_3(x_0) \leq v_2(x_0)$

sowie Lösungen für die Probleme (1.3) und (1.5) angegeben.

1. $v_2(x_0) \leq v_1(x_0)$:

Aus der Theorie des optimalen Stoppens ist bekannt (vgl. z.B. [43]), dass die Funktion v_1 die kleinste \mathfrak{X} -exzessive Funktion auf E ist, die G majorisiert, d.h.

$$v_1(x) \geq \mathbf{E}_x[v_1(X_t)] \quad \text{für alle } x \in \text{int } E, \ t > 0. \quad (1.10)$$

Darüber hinaus gilt $v_1(x) = G(x)$ für $x \in \partial E$. Für $x \notin E$ wird $v_1(x) = 0$ gesetzt.

Wir betrachten für $x \in \text{int } E$ und $\epsilon > 0$ die geglätteten Funktionen

$$\begin{aligned} v_1^\epsilon(x) &:= \int_{\mathbb{R}^N} k_\epsilon(x-y) v_1(y) dy \quad \text{und} \\ \tilde{v}_1^\epsilon(x) &:= v_1^\epsilon(x) + \delta(\epsilon), \end{aligned}$$

wobei

$$\delta(\epsilon) := \sup_{\substack{x, x+h \in E \\ \|h\| \leq \epsilon}} |G(x+h) - G(x)| \quad (1.11)$$

und der Glättungskern k_ϵ z.B. wie folgt gewählt ist:

$$k_\epsilon(x) := \epsilon^{-n} k\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

mit

$$k(x) := \begin{cases} C \cdot \exp\left(-(1 - \|x\|^2)^{-1}\right) & \text{für } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{für } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

und der Konstanten C so gewählt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^N} k(x) dx = 1.$$

Dann ist $\tilde{v}_1^\epsilon \in C^\infty(E) \subset \mathcal{D}(A)$ (vgl. z.B. [42] S.30) und

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x [\tilde{v}_1^\epsilon(X_t)] &= \mathbf{E}_x \left[\int_{\mathbb{R}^N} k_\epsilon(X_t - y) v_1(y) dy \right] + \delta(\epsilon) \\ &= \mathbf{E}_x \left[\int_{\mathbb{R}^N} k_\epsilon(z) v_1(X_t - z) dz \right] + \delta(\epsilon) \quad (z := X_t - y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} k_\epsilon(z) \mathbf{E}_x [v_1(X_t - z)] dz + \delta(\epsilon) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} k_\epsilon(z) v_1(x - z) dz + \delta(\epsilon) \\ &= \tilde{v}_1^\epsilon(x) \quad \text{für alle } x \in \text{int } E, t > 0. \end{aligned}$$

Damit ist auch \tilde{v}_1^ϵ eine \mathfrak{X} -exzessive Funktion. Wegen $\tilde{v}_1^\epsilon \in \mathcal{D}(A)$ folgt damit $A \tilde{v}_1^\epsilon \leq 0$.

Weiterhin ist für $x \in \text{int } E$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1^\epsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} k_\epsilon(x - y) v_1(y) dy + \delta(\epsilon) \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} k_\epsilon(x - y) G(y) dy + \delta(\epsilon) \\ &= G^\epsilon(x) + \delta(\epsilon) \\ &\geq G^\epsilon(x) + |G(x) - G^\epsilon(x)| \quad (\text{wegen der Definition von } \delta(\epsilon)) \\ &\geq G(x), \end{aligned}$$

d.h. \tilde{v}_1^ϵ majorisiert G .

Damit ist jedoch

$$\{u \mid u \geq G, Au \leq 0\} \supseteq \{\tilde{v}_1^\epsilon \mid \epsilon > 0\}$$

d.h.

$$\begin{aligned} v_2(x_0) &= \inf_{u \in \mathcal{D}(A)} \{u(x_0) \mid u \geq G, Au \leq 0\} \\ &\leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \tilde{v}_1^\epsilon(x_0) \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} v_1^\epsilon(x_0) + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \delta(\epsilon) \\ &= v_1(x_0). \end{aligned}$$

2. $v_1(x_0) \leq v_3(x_0)$:

Sei τ mit $\mathbf{E} \tau < \infty$ eine Lösung von (1.3), sei μ_τ die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_τ und μ das Aufenthaltsmaß des Prozesses $\{X_t\}_{t \leq \tau}$ auf E . Für eine gegebene Funktion $f \in \mathcal{D}(A)$ und $t < \infty$ folgt aus dem Satz von Itô und dem Stoppsatz unter Beachtung der Voraussetzung (1.1)(iii), dass

$$\mathbf{E}_{x_0} f(X_{t \wedge \tau}) - f(x_0) = \mathbf{E}_{x_0} \int_0^{t \wedge \tau} A f(X_s) ds.$$

Für $t \rightarrow \infty$ erhält man damit

$$\mathbf{E}_{x_0} f(X_\tau) - f(x_0) = \mathbf{E}_{x_0} \int_0^\tau A f(X_s) ds.$$

Man beachte, dass aufgrund der Definition von μ und μ_τ die folgenden Gleichungen gelten:

$$\mathbf{E}_{x_0} \int_0^\tau A f(X_s) ds = \int_E A f(x) d\mu(x),$$

$$\mathbf{E}_{x_0} f(X_\tau) = \int_E f(x) d\mu_\tau(x) \quad \text{und}$$

$$\mathbf{E}_{x_0} [G(X_\tau)] = \int_E G(x) d\mu_\tau(x).$$

Damit ist das Paar (μ, μ_τ) zulässig für das Problem (1.5). Da τ die optimale Lösung für Problem (1.3) ist und die Zielfunktionale der Probleme (1.3) und (1.5) übereinstimmen, folgt dass die Ungleichung $v_1(x_0) \leq v_3(x_0)$ erfüllt ist.

3. $v_3(x_0) \leq v_2(x_0)$:

Seien $\mu \in \mathcal{M}^+(E)$ und $\mu_\tau \in \mathcal{P}(E)$, so dass die Gleichung $\mu_\tau - \delta_{x_0} = A^* \mu$ erfüllt ist. Wir betrachten eine beliebige Funktion $u \in \mathcal{D}(A)$, die die Bedingungen $u \geq G$ und $Au \leq 0$ erfüllt. Dann gilt

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \langle u, \mu_\tau \rangle - \langle Au, \mu \rangle \\ &\geq \langle u, \mu_\tau \rangle \\ &\geq \langle G, \mu_\tau \rangle. \end{aligned}$$

Für jede zulässige Paarung $u, (\mu, \mu_\tau)$ für die Probleme (1.4) bzw. (1.5) ist also der Zielfunktionswert von (1.4) stets größer oder gleich als der Zielfunktionswert von (1.5). Damit ist $v_3(x_0) \leq v_2(x_0)$.

Mit einer gegebenen Lösung τ für Problem (1.3) erhält man eine Lösung (μ, μ_τ) für Problem (1.5) wie zum Beginn von Abschnitt 2 angegeben. Eine Lösung für das Problem (1.3) ist die Zeit τ^* zu der der Prozess \mathfrak{X} das erste Mal die Menge $S = \{x \mid v_1(x) = G(x)\}$ erreicht (vgl. z.B. [43] Theorem 10.12).

II. Für den Fall allgemeiner Verlaufsgewinne Q betrachten wir folgenden Prozess

$$Z_t = \begin{pmatrix} X_t \\ S_t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}, \quad \text{wobei}$$

$$dS_t = Q(X_t) dt.$$

Dann hat der infinitesimale Generator A_Z von Z_t folgende Gestalt

$$A_Z h(x, s) = A h(x, s) + Q(x) \frac{\partial h}{\partial s}(x, s)$$

für Funktionen h mit $h(\cdot, s) \in \mathcal{D}(A)$ und $h(x, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$. Als Zielfunktional betrachten wir die Funktion

$$\tilde{G}(x, s) := G(x) + s.$$

Dann ist

$$\mathbf{E}_{x_0} \left[G(X_\tau) + \int_0^\tau Q(X_t) dt \right] = \mathbf{E}_{x_0} [G(X_\tau) + S_\tau] = \mathbf{E}_{(x_0, 0)} [\tilde{G}(Z_\tau)].$$

Weiterhin sei $\tilde{E} = E \times I$. Dann erfüllen $(Z_t)_{t \geq 0}$ und \tilde{E} die Voraussetzungen (1.1). Da E kompakt ist sowie G und Q stetig und damit auch beschränkt sind, ist \tilde{G} Lipschitzstetig (hier wird $\|(x, s)\| = \|x\| + |s|$ verwendet) und damit ist Teil I anwendbar. \square

Definitionen:

1. Die oben definierte Menge $S := \{x \mid v_1(x) = G(x)\}$ wird im Weiteren auch als Stoppbereich bezeichnet.
2. Die Menge $F = E \setminus S$ wird Fortsetzungsbereich genannt. Für einen gegebenen Startpunkt $x_0 \in F$ heißt die größte zusammenhängende Teilmenge F_{x_0} von F , die x_0 enthält, lokaler Fortsetzungsbereich von x_0 . Für $x_0 \in S$ wird $F_{x_0} := \emptyset$ gesetzt.

Bemerkungen:

1. Der Stoppbereich S umfasst zumindest den Rand ∂E von E , da dort der Prozess \mathfrak{X} absorbiert wird.

2. Die Stoppzeit τ^* , die am Ende von Teil I des Beweises definiert wurde, ist die kleinste Lösung des Problems (1.3), d.h. für alle Lösungen τ von Problem (1.3) gilt $\tau^* \leq \tau$ (vgl z.B. [43] Theorem 10.12).

Nun stellt sich die Frage, wann ein zulässiges Paar (μ, μ_τ) für das Problem (1.5) mit einem gegebenen Operator A auch einen passenden Prozess \mathfrak{X} und eine passende Stoppzeit τ erzeugt, die zulässig für Problem (1.3) sind. Eine Teilantwort darauf gibt das Hauptresultat (Theorem 3.3) aus der Arbeit von Cho und Stockbridge [10].

Dazu soll der Operator A zunächst für Funktionen auf ganz \mathbb{R}^N definiert sein und die folgenden Voraussetzungen (1.12)(i) bis (1.12)(v) erfüllen:

- (i) Es sind $\mathcal{D}(A) \subset C_b(\mathbb{R}^N)$ und $\mathcal{R}(A) \subset C(\mathbb{R}^N)$, wobei $\mathcal{R}(A)$ das Bild von A bezeichnet und $C_b(\mathbb{R}^N)$ die Menge aller stetigen beschränkten Funktionen auf \mathbb{R}^N ist.
- (ii) Es ist $\mathbf{1} \in \mathcal{D}(A)$ und $(A\mathbf{1})(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$, wobei $\mathbf{1}$ die konstante Funktion $\mathbf{1}(x) = 1$ auf \mathbb{R}^N ist.
- (iii) $\mathcal{D}(A)$ sei eine Algebra und trenne Punkte in \mathbb{R}^N , d.h. für alle Punkte $x, y \in \mathbb{R}^N$ existiert ein $f \in \mathcal{D}(A)$ mit $f(x) \neq f(y)$.
- (iv) Der Operator A erfüllt das positive Maximumsprinzip.
- (v) Der Graph des Operators A ist separabel, d.h. es existiert eine abzählbare Menge von Funktionen $\{f_k\}_{k \geq 1} \subset \mathcal{D}(A)$, so dass die Menge $\{(f, Af) \mid f \in \mathcal{D}(A)\}$ im punktweisen Abschluss der Menge $\{(f_k, Af_k)\}_{k \geq 1}$ enthalten ist.

Bemerkung: Das positive Maximumsprinzip besagt, dass für alle $f \in \mathcal{D}(A)$ und alle $x \in \mathbb{R}^N$ mit $f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}^N} f(y)$ die Ungleichung $Af(x) \leq 0$ erfüllt ist (vgl. [17]).

Satz 1.2 :

Sei A ein gegebener Operator, der die Voraussetzungen (1.12)(i) bis (1.12)(v) erfülle. Seien $\mu_\tau \in \mathcal{P}(E)$ und $\mu \in \mathcal{M}(E)$ gegeben, so dass die nachfolgende Gleichung für alle $f \in \mathcal{D}(A)$ erfüllt ist

$$\int_E f(x) d\mu_\tau(x) - f(x_0) = \int_E Af(x) d\mu(x). \quad (1.13)$$

Dann existieren eine Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, ein stochastischer Prozess \mathfrak{X} und eine $\{\mathcal{F}_t\}$ -Stoppzeit τ , die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

1. Der Prozess \mathfrak{X} ist \mathcal{F}_t -progressiv messbar.
2. Es ist $X_0 = x_0$.
3. Das Maß μ ist das Aufenthaltsmaß des Prozesses \mathfrak{X} bis zur Stoppzeit τ (vgl. (1.7)).
4. Das Wahrscheinlichkeitsmaß μ_τ ist die Verteilung von X_τ .

5. Der Prozess

$$M_t^f := f(X_t) - f(x_0) - \int_0^t Af(X_s) ds \quad (1.14)$$

ist ein \mathcal{F}_t -Martingal für alle $f \in \mathcal{D}(A)$.

Um nun wiederum zum gegebenen beschränkten Zustandsraum E mit Absorption des Prozesses außerhalb von $\text{int}E$ zurückkehren zu können, muss vor dem Beginn des Beweises von Satz 1.2 noch eine weitere künstliche Steuerungskomponente $\tilde{u} \in \{0, 1\}$ gemäß Satz 3.1 aus [34] mit $\eta(x, d\tilde{u}) = \delta_1(\tilde{u})$ für $x \in \text{int}E$ und $\eta(x, d\tilde{u}) = \delta_0(\tilde{u})$ für $x \notin \text{int}E$ hinzugefügt werden. Damit wird gesichert, dass für einen Startpunkt $x_0 \in E$ der Prozess \mathfrak{X} beim Verlassen von E absorbiert wird.

Bemerkung: Ein solches Paar (\mathfrak{X}, τ) aus Satz 1.2 heißt schwach zulässig für das Problem (1.3). Es ist damit aber noch nicht gesichert, dass die Stoppzeit τ auch eine zulässige Stoppzeit für dieses Problem ist. Weiterhin ist nicht klar, ob die Trajektorien von \mathfrak{X} stetig sind.

1.3 Das lineare Programm zum dualen Ansatz

1.3.1 Weitere Voraussetzungen

Unter bestimmten Voraussetzungen kann ein zum dualen Ansatz (1.5) äquivalentes unendlichdimensionales lineares Programm formuliert werden. Dieses lineare Programm bildet die Grundlage für das im Folgenden vorgeschlagene Verfahren zur Lösung von Stoppproblemen. Die Voraussetzungen (1.15) sind im Einzelnen:

- (i) Das Gebiet $E \subset \mathbb{R}^N$ ist das Einheitsquadrat $[0, 1]^N$.
- (ii) Die Funktionen G und Q sind Polynome in x , d.h.

$$G(x) = \sum_{i_1 + \dots + i_N \leq n} g_{i_1, \dots, i_N} x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N},$$

$$Q(x) = \sum_{j_1 + \dots + j_N \leq m} q_{j_1, \dots, j_N} x_1^{j_1} \dots x_N^{j_N}.$$

- (iii) Der Prozess \mathfrak{X} ist ein Diffusionsprozess mit einem infinitesimalen Operator A der Form:

$$(Af)(x) = \left[\sum_{i=1}^N b^{(i)}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\sigma \sigma^T)^{(i,j)}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right] \mathbb{1}_{\text{int}E}(x) \quad (1.16)$$

für $x \in E$, $f \in C^2(E)$, $b = (b^{(1)}, \dots, b^{(N)})^T$ und $\sigma = (\sigma^{(i,j)})_{i \leq N, j \leq N'}$.

- (iv) Die Funktionen $b^{(i)}$ und $a^{(i,j)} := (\sigma \sigma^T)^{(i,j)}$ sind für alle $i, j \leq N$ Polynome in x .

Wir bezeichnen mit $B_k^{(i)}$ und $A_k^{(i,j)}$ die höchste Ordnung der Polynome $b^{(i)}$ bzw. $a^{(i,j)}$ bzgl. der Dimension k sowie mit $B^{(i)} = \sum_{k=1}^N B_k^{(i)}$ und $A^{(i,j)} = \sum_{k=1}^N A_k^{(i,j)}$ die Ordnung von $b^{(i)}$ und $a^{(i,j)}$.

Bemerkungen:

1. Wegen der Form (1.16) des infinitesimalen Operators A wird der Prozess \mathfrak{X} am Rand von E absorbiert.
2. Mögliche Abschwächungen dieser Voraussetzungen werden im Weiteren noch genannt.
3. Betrachtet man den, durch die nachfolgende stochastische Differentialgleichung (1.17) definierten, Diffusionsprozess $\{X_t\}_{t \geq 0}$ auf E mit Absorption am Rand

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad X_0 = x_0 \in E \quad (1.17)$$

mit b und σ wie oben und W_t dem Wienerprozess im $\mathbb{R}^{N'}$, dann ist der zugehörige infinitesimale Operator A durch die Gleichung (1.16) beschrieben (vgl. z.B. [43] Theorem 7.9).

4. Aufgrund der Kompaktheit von E existiert eine Konstante D , so dass

$$\|b(x)\| + \sqrt{\|a(x)\|} \leq D(1 + \|x\|) \quad \text{für alle } x \in E$$

gilt. Erfüllt die Abbildung $a(x)$ weiterhin die Eigenschaft,

$$a(x) \text{ ist für alle } x \in \text{int}E \text{ positiv definit,} \quad (1.18)$$

dann ist die Lösung des Martingalproblem es für (A, δ_{x_0}) bis zum Zeitpunkt $L_E^{x_0}$ des Verlassens von $\text{int}E$ eindeutig bestimmt (vgl. Stroock und Varadhan [47]).

Aus der Theorie des optimalen Stoppens ist bekannt, dass für die Funktion v_1 innerhalb des lokalen Fortsetzungsbereiches F_{x_0} gilt: $Av_1 + Q = 0$ (vgl. z.B. [43] Theorem 10.18). Damit folgt mit den Voraussetzungen (1.1) und (1.15) (ii)–(iv), dass die Funktion v_1 für $x_0 \in E$ auf dem lokalen Fortsetzungsbereich F_{x_0} eine analytische Funktion ist. Gleichzeitig ist auch G eine analytische Funktion. Für den Fall $F_{x_0} \neq \emptyset$ können somit die Fortsetzung von $v_1|_{F_{x_0}}$ auf E und die Funktion G nicht über den Rand von F_{x_0} hinaus auf einem Gebiet mit positivem Borelmaß übereinstimmen. Die Menge, auf der die Funktion G und die Fortsetzung von $v_1|_{F_{x_0}}$ auf E übereinstimmen, sei mit \tilde{S} bezeichnet.

Ist nun $F_{x_0} \neq \emptyset$ und erfüllt $a(x)$ die obige Eigenschaft (1.18), dann ist die lokale Zeit von $\{X_t\}_{t \geq 0}$ auf der Menge \tilde{S} gleich Null. Trotzdem muss der Träger des Stoppmaßes μ_τ , auch bei Stetigkeit der Trajektorien von $\{X_t\}_{t \geq 0}$, keine Teilmenge des Randes ∂F_{x_0} des lokalen Fortsetzungsbereiches sein (vgl. den Fall $q = 3.5$ im ersten Teil von Abschnitt 1.5.1). Damit ist auch keine Eindeutigkeit des Paares (\mathfrak{X}, τ) in Satz 1.2 gesichert. Der lokale Fortsetzungsbereich F_{x_0} kann sich in Einzelfällen vom Träger des Maßes μ unterscheiden, die obigen Überlegungen sichern aber stets, dass der Träger des Maßes μ_τ eine Teilmenge der Menge \tilde{S} ist und damit das Borelmaß 0 hat.

1.3.2 Der Diskretisierungsansatz

Es bieten sich prinzipiell zwei Möglichkeiten zur Lösung des dualen Problems (1.5) an, und zwar die Formulierung eines unendlichdimensionalen linearen Programmes mit den Momenten von μ und μ_τ als Variablen sowie die Diskretisierung des Problems, d.h. die Diskretisierung des Zustandsraumes E und des Diffusionsprozesses \mathfrak{X} . Der erste Ansatz ist Gegenstand dieser Arbeit, der zweite wird in der Dissertation von Cho [9] und der Arbeit von Cho und Stockbridge [10] verfolgt.

An dieser Stelle soll auf einen interessanten Aspekt für das resultierende lineare Programm bei der Diskretisierung in Cho [9] eingegangen werden. Dazu wird kurz der Diskretisierungsansatz vorgestellt. Da in den obigen Arbeiten kein Verlaufsgewinn Q berücksichtigt wird, soll in den nachfolgenden Untersuchungen in diesem Abschnitt ebenfalls darauf verzichtet werden. Die Ergebnisse lassen sich allerdings leicht auch auf den Fall $Q \neq 0$ verallgemeinern, da lediglich die Zielfunktion in den jeweiligen linearen Programmen modifiziert werden muss.

Zunächst wird der Zustandsraum mit einem diskreten Gitter $\mathcal{G} = \{x_i\}_{i=1,\dots,k} \subset E$ überzogen. Der Diffusionsprozess \mathfrak{X} wird durch eine Markovsche Kette $\tilde{\mathfrak{X}}$ in stetiger Zeit auf dem Gitter \mathcal{G} approximiert. Eine Teilmenge der Punkte wird als Menge von absorbierenden Punkten gewählt und die zugehörige Indexmenge mit K bezeichnet. Der Index des Startpunktes der Markovschen Kette sei i_0 , wobei $i_0 \notin K$ gelte. Weiterhin werden für jeden Punkt $x_i \in \mathcal{G}$ mit $i \notin K$ eine Sprungintensität λ_i und für $j \neq i$ Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij} = \mathbf{P}(X_{l+1} = x_j \mid X_l = x_i)$ geeignet gewählt, wobei $\{X_l\}_{l=0,1,\dots}$ die eingebettete Kette von $\tilde{\mathfrak{X}}$ ist. Sprünge in sich selbst werden dabei nicht zugelassen, d.h. es gilt $p_{ii} = 0$ für alle $i = 1, \dots, k$. So wird z.B. der Wienerprozess durch eine symmetrische Irrfahrt auf einem äquidistanten Gitter mit Absorption am Rand approximiert (vgl. auch Abschnitt 1.8.1).

Mit dieser Diskretisierung erhält man nun ein diskretisiertes Stoppproblem für die eingebettete Kette $\{X_l\}_{l=0,1,\dots}$, mit dem nun wiederum ein diskretes Aufenthaltsmaß und ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß zum Stoppzeitpunkt verbunden sind. Die Massen, die diese Maße auf dem Punkt $x_i \in \mathcal{G}$ haben, werden im Weiteren mit m_i bzw. m_i^τ bezeichnet. Da die Kette $\{X_l\}_{l=0,1,\dots}$ in den Punkten x_i mit $i \in K$ gestoppt wird, ist für diese Punkte $m_i = 0$.

Die Approximation des Prozesses \mathfrak{X} kann man auch als eine Approximation des infinitesimalen Generators A

$$A f(x_i) \approx \tilde{A} f(x_i) := \lambda_i \left(\sum_{j=1}^k p_{ij} f(x_j) - f(x_i) \right) \quad \text{für } x_i \in \mathcal{G}$$

auffassen. Dabei ist $\mathcal{D}(\tilde{A})$ die Menge aller reellen Abbildungen auf \mathcal{G} . Damit ergibt sich das folgende diskretisierte lineare Programm (1.19) für das duale Problem (1.5)

$$\max \sum_{i=1}^k G(x_i) m_i^\tau \tag{1.19}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^k f(x_i) m_i^\tau - \sum_{i: i \notin K} \lambda_i \left(\sum_{j: j \neq i} p_{ij} f(x_j) - f(x_i) \right) m_i = f(x_{i_0}) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{D}(\tilde{A}),$$

$$\sum_{i=1}^k m_i^\tau = 1,$$

$$m_i^\tau \geq 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, k \quad \text{und} \quad m_i \geq 0 \quad \text{für alle } i \notin K$$

(vgl. [9]). Nun werden für $i = 1, \dots, k$ die Testfunktionen $f_i \in \mathcal{D}(\tilde{A})$ mit $f_i(x_i) = 1$ und $f_i(x_j) = 0$ für $i \neq j$ gewählt. Damit nimmt dann das lineare Programm (1.19) folgende Gestalt an

$$\max \sum_{i=1}^k G(x_i) m_i^\tau \tag{1.20}$$

unter den Nebenbedingungen

$$m_l^\tau - \sum_{i: i \notin K} \lambda_i p_{il} m_i + \lambda_l m_l = 0 \quad \text{für alle } l \neq i_0, l \notin K,$$

$$m_l^\tau - \sum_{i: i \notin K} \lambda_i p_{il} m_i = 0 \quad \text{für alle } l \in K,$$

$$m_{i_0}^\tau - \sum_{i: i \notin K} \lambda_i p_{ii_0} m_i + \lambda_{i_0} m_{i_0} = 1, \quad \sum_{i=1}^k m_i^\tau = 1,$$

$$m_i^\tau \geq 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, k \quad \text{und} \quad m_i \geq 0 \quad \text{für alle } i \notin K.$$

Dabei handelt es sich um ein lineares Programm mit den Variablen $\{m_i^\tau\}_{i=1, \dots, k}$ und $\{m_i\}_{i \notin K}$, das für die numerische Approximation der Lösung des ursprünglichen Stoppproblem verwendet wird.

Es soll nun gezeigt werden, dass dieses lineare Programm äquivalent zu dem linearen Programm ist, das man erhält, wenn man das diskrete Stoppproblem als ein diskretes Markovsches Entscheidungsproblem mit durchschnittsmaximalem Kriterium formuliert und darauf dann den üblichen linearen Programmierungsansatz anwendet.

Für die Formulierung des Stoppproblem als diskretes Markovsches Entscheidungsproblem für die eingebettete Kette $\{X_l\}_{l=0,1,\dots}$ auf dem Gitter \mathcal{G} wählen wir als Entscheidungsraum \mathbf{A} die Menge $\{0,1\}$, wobei die Entscheidung $a = 1$ bedeutet, dass man den Prozess weiterlaufen lässt und $a = 0$ bedeutet, dass der Prozess gestoppt wird. Die Entscheidungsmenge $\mathbf{A}(i)$ ist für

alle $i \in K$ die Menge $\{0\}$, für alle anderen Punkte die Menge \mathbf{A} . Für $a = 1$ entsprechen die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(a)$ den oben definierten Wahrscheinlichkeiten p_{ij} . Nach dem Stoppen oder der Absorption des Prozesses erfolgt mit Wahrscheinlichkeit 1 ein Rücksprung in den Startpunkt x_{i0} , d.h. es gilt $p_{ii_0}(0) = 1$ für alle $i = 1, \dots, k$. Für die Gewinnfunktion g setzt man $g_i(1) = 0$ und $g_i(0) = G(x_i)$ für alle $i = 1, \dots, k$. Dann liefert der lineare Programmierungsansatz (vgl. z.B. [48] S. 199 ff.) für dieses Entscheidungsproblem das folgende lineare Programm (1.21) in den Variablen x_{ia}

$$\max \sum_{i=1}^k G(x_i) x_{i0} \quad (1.21)$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_{l0} + x_{l1} - \sum_{i: i \notin K} p_{il} x_{i1} = 0 \quad \text{für alle } l \neq i_0, l \notin K,$$

$$x_{l0} - \sum_{i: i \notin K} p_{il} x_{i1} = 0 \quad \text{für alle } l \in K,$$

$$x_{i_0 0} + x_{i_0 1} - \sum_{i: i \notin K} p_{ii_0} x_{i1} - \sum_{i=1}^k x_{i0} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^k x_{i0} + \sum_{i: i \notin K} x_{i1} = 1,$$

$$x_{i0} \geq 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, k \quad \text{und} \quad x_{i1} \geq 0 \quad \text{für alle } i \notin K.$$

Die Interpretation der Variablen x_{ia} als mittlerer Zeitanteil, den die eingebettete Markovsche Kette $\{X_l\}_{l=0,1,\dots}$ im Zustand x_i verbringt und dort die Entscheidung a getroffen wird, liefert direkt eine geeignete Transformation der Variablen x_{ia} , die die Äquivalenz der linearen Programme (1.20) und (1.21) zeigt. Wenn man beachtet, dass die Summe $\sum_{i=1}^k x_{i0}$ der mittlere Zeitanteil

ist, zu dem die Kette $\{X_l\}_{l=0,1,\dots}$ gestoppt wird und die Normierungsbedingungen $\sum_{i=1}^k m_i^\tau = 1$

und $\sum_{i=1}^k x_{i0} + \sum_{i: i \notin K} x_{i1} = 1$ berücksichtigt, erhält man die nachfolgenden Transformationen

$$m_i^\tau = x_{i0} \left(\sum_{j=1}^k x_{j0} \right)^{-1} \quad \text{und} \quad m_i = \lambda_i x_{i1} \left(\sum_{j=1}^k x_{j0} \right)^{-1}$$

bzw.

$$x_{i0} = m_i^\tau \left(1 + \sum_{j: j \notin K} \lambda_j^{-1} m_j \right)^{-1} \quad \text{und} \quad x_{i1} = \lambda_i^{-1} m_i \left(1 + \sum_{j: j \notin K} \lambda_j^{-1} m_j \right)^{-1}.$$

Man überprüft nun leicht, dass sich damit die linearen Programme (1.20) und (1.21) ineinander überführen lassen.

Somit spielt es also keine Rolle, ob man zunächst die duale Formulierung (1.5) des Stoppproblems (1.3) wählt und dann die in der Arbeit von Cho [9] vorgeschlagene Diskretisierung vornimmt oder das ursprüngliche Stoppproblem (1.3) direkt diskretisiert und auf das resultierende Markovsche Entscheidungsproblem den linearen Programmierungsansatz anwendet. Die linearen Programme stimmen überein und damit natürlich auch die Güte der beiden Vorgehensweisen. Das betrifft unter anderem auch Konvergenzaussagen für die Lösungen der linearen Programme (1.20) und (1.21) gegen die Lösung der stetigen Probleme (1.5) und (1.3) bei zunehmender Verfeinerung des Gitters \mathcal{G} .

Die Approximation des Prozesses \mathfrak{X} durch eine Markovsche Kette in diskreter Zeit entspricht einer Approximation des Operators A durch die Differenz der Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten und der Einheitsmatrix. In diesem Fall erhält man eine analoge Äquivalenz der linearen Programme.

1.3.3 Das unendlichdimensionale lineare Programm

Es soll hier nun ein Ansatz vorgestellt werden, der auf eine Diskretisierung des Zustandsraumes E und des Prozesses \mathfrak{X} und damit auch des Operators A verzichtet. Die Formulierung des linearen Programmes erfolgt dabei mittels der Momente des Aufenthaltsmaßes μ und der Verteilung μ_τ .

Seien μ_{i_1, \dots, i_N} das (i_1, \dots, i_N) -te Moment des Aufenthaltsmaßes μ und $\mu_{i_1, \dots, i_N}^\tau$ das (i_1, \dots, i_N) -te Moment der Verteilung μ_τ .

Für die Klasse $\{f_{(i_1, \dots, i_N)}\}_{i_1, \dots, i_N=0,1,\dots}$ der Monome, d.h.

$$f_{(i_1, \dots, i_N)}(x) = x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N}$$

als Testfunktionen in (1.5) und einen Startwert $x_0 = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)$ ergibt sich das folgende unendlichdimensionale lineare Programm

$$\max \sum_{j_1, \dots, j_N \geq 0} g_{j_1, \dots, j_N} \mu_{j_1, \dots, j_N}^\tau + \sum_{j_1, \dots, j_N \geq 0} q_{j_1, \dots, j_N} \mu_{j_1, \dots, j_N} \quad (1.22)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \mu_{i_1, \dots, i_N}^\tau &- \sum_{j_1, \dots, j_N \geq 0} \sum_{k=1}^N i_k b_{j_1, \dots, j_N}^{(k)} \mu_{i_1+j_1, \dots, i_k+j_k-1, \dots, i_N+j_N} \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j_1, \dots, j_N \geq 0} \sum_{k, l=1; k \neq l}^N i_k i_l a_{j_1, \dots, j_N}^{(k, l)} \mu_{i_1+j_1, \dots, i_k+j_k-1, \dots, i_l+j_l-1, \dots, i_N+j_N} \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j_1, \dots, j_N \geq 0} \sum_{k=1}^N i_k (i_k - 1) a_{j_1, \dots, j_N}^{(k, k)} \mu_{i_1+j_1, \dots, i_k+j_k-2, \dots, i_N+j_N} \end{aligned}$$

$$= \tilde{x}_1^{i_1} \dots \tilde{x}_N^{i_N} \quad \text{für alle } i_1, \dots, i_N \geq 0.$$

Diese Gleichungsnebenbedingungen sichern jedoch nicht, dass die Folgen $\{\mu_{i_1, \dots, i_N}^T\}_{i_1, \dots, i_N \geq 0}$ und $\{\mu_{i_1, \dots, i_N}\}_{i_1, \dots, i_N \geq 0}$ wirklich Folgen von Momenten von Verteilungen auf $[0, 1]^N$ sind.

Als geeignet für eine lineare Formulierung dieser Forderung erweisen sich auf F. Hausdorff (vgl. [20], [21]) zurückgehende Bedingungen, die im Weiteren kurz als Hausdorffbedingungen bezeichnet werden. Sie sind hinreichend und notwendig dafür, dass die genannten Folgen wirklich Momentenfolgen von Maßen auf $[0, 1]^N$ sind.

Für den eindimensionalen Fall ($N = 1$) liegen den Hausdorffbedingungen die nachfolgenden Überlegungen zu Grunde.

Für eine Zufallsgröße X auf $[0, 1]$ gilt offensichtlich

$$\mathbf{E}[X^k(1-X)^m] \geq 0 \quad \text{für alle } k, m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.23)$$

Führt man für die Folge $\{\mu_i\}_{i \geq 0}$ der Momente von X die iterierten Differenzen

$$(\Delta\mu)_i = \Delta\mu_i := \mu_{i+1} - \mu_i \quad (1.24)$$

und die iterierten Differenzen höherer Ordnung

$$(\Delta^{n+1}\mu)_i = \Delta^{n+1}\mu_i := \Delta^n\mu_{i+1} - \Delta^n\mu_i \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.25)$$

ein, so überprüft man leicht, dass

$$(-1)^m \Delta^m \mu_k = \mathbf{E}[X^k(1-X)^m] \quad (1.26)$$

gilt, d.h. es ist

$$(-1)^m \Delta^m \mu_k \geq 0 \quad \text{für alle } k, m = 0, 1, 2, \dots$$

Eine Folge mit dieser Eigenschaft heißt vollständig monoton (vgl. z.B. [18] S.224).

Die zentrale Aussage ist nun, dass jede vollständig monotone Folge $\{\nu_n\}_{n \geq 0}$ mit $\nu_0 = 1$ die Folge von Momenten einer Zufallsgröße X auf $[0, 1]$ ist. Beweise für diese Aussage findet man z.B. in [45] und [18].

Beachtet man nun noch, dass

$$\Delta^m \mu_k = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (-1)^{m-s} \mu_{k+s}$$

gilt, dann kommt man zu der folgenden Formulierung der Hausdorffbedingungen im eindimensionalen Fall mit iterierten Differenzen bzw. Binomialkoeffizienten (vgl. z.B. [45] S. 8 ff).

Satz 1.3 :

Eine Folge reeller Zahlen $\{\mu_i\}_{i \geq 0}$ ist eine Folge von Momenten eines Maßes μ auf $[0, 1]$ gdw.

$$(-1)^m \Delta^m \mu_k \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad (1.27)$$

$$\sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (-1)^s \mu_{k+s} \geq 0 \quad (1.28)$$

für alle $k, m = 0, 1, 2, \dots$ gilt.

Für den Fall $N = 2$ arbeitet man mit den folgenden doppelten iterierten Differenzen

$$\Delta_1 \Delta_2 \mu_{i,j} := \mu_{i+1,j+1} - \mu_{i+1,j} - \mu_{i,j+1} + \mu_{i,j}, \quad (1.29)$$

$$\Delta_1^{l+1} \Delta_2^m \mu_{i,j} := \Delta_1^l \Delta_2^m \mu_{i+1,j} - \Delta_1^l \Delta_2^m \mu_{i,j} \quad \text{und} \quad (1.30)$$

$$\Delta_1^l \Delta_2^{m+1} \mu_{i,j} := \Delta_1^l \Delta_2^m \mu_{i,j+1} - \Delta_1^l \Delta_2^m \mu_{i,j} \quad \text{für } i, j \geq 0 \text{ und } l, m \geq 1. \quad (1.31)$$

Allgemein werden die iterierten Differenzen höherer Ordnung

$$\begin{aligned} \Delta_1^{j_1} \dots \Delta_i^{j_i+1} \dots \Delta_N^{j_N} \mu_{n_1, \dots, n_N} := \\ \Delta_1^{j_1} \dots \Delta_i^{j_i} \dots \Delta_N^{j_N} \mu_{n_1, \dots, n_i+1, \dots, n_N} - \Delta_1^{j_1} \dots \Delta_i^{j_i} \dots \Delta_N^{j_N} \mu_{n_1, \dots, n_i, \dots, n_N} \end{aligned} \quad (1.32)$$

definiert und dafür mit dem Multiindices $j = (j_1, \dots, j_N)$ und $n = (n_1, \dots, n_N)$ die abkürzende Schreibweise

$$\Delta^j \mu_n := \Delta_1^{j_1} \dots \Delta_N^{j_N} \mu_{n_1, \dots, n_N} \quad (1.33)$$

benutzt.

Dann haben die Hausdorffbedingungen folgende Form (vgl. [25], [45] S. 9 ff, [29]):

Satz 1.4 :

1. Eine Doppelfolge reeller Zahlen $\{\mu_{i_1, i_2}\}_{i_1, i_2 \geq 0}$ ist eine Folge von Momenten eines Maßes μ auf $[0, 1]^2$ gdw.

$$(-1)^{l+m} \Delta_1^l \Delta_2^m \mu_{i,j} \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad (1.34)$$

$$\sum_{r=0}^l \sum_{s=0}^m \binom{l}{r} \binom{m}{s} (-1)^{r+s} \mu_{i+r, j+s} \geq 0 \quad (1.35)$$

für alle $l, m = 0, 1, 2, \dots$ und $i, j = 0, 1, 2, \dots$ gilt.

2. Eine reelle Folge $\{\mu_j\}_{j \geq 0}$ mit Multiindex j ist eine Folge von Momenten eines Maßes μ auf $E = [0, 1]^N$ gdw.

$$(-1)^m \Delta^m \mu_k \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad (1.36)$$

$$\sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (-1)^s \mu_{k+s} \geq 0 \quad (1.37)$$

für alle Multiindizes $k, m \in \mathbb{N}^N$ gilt.

Dabei werden hier und im Weiteren für die Multiindizes $j = (j_1, \dots, j_N)$ und $n = (n_1, \dots, n_N)$ sowie den Vektor $x \in \mathbb{R}^N$ die folgenden abkürzenden Schreibweisen verwendet

$$\binom{n}{j} := \prod_{i=1}^N \binom{n_i}{j_i}, \quad x^j := \prod_{i=1}^N x_i^{j_i} \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^n := \sum_{j_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{j_N=0}^{n_N}. \quad (1.38)$$

Bemerkungen:

1. Die Hausdorffbedingungen haben die entscheidende Eigenschaft, dass sie in den Momenten μ_i linear sind.
2. Obwohl die Formulierungen (1.27) und (1.28), (1.34) und (1.35) bzw. (1.36) sowie (1.37) jeweils äquivalent sind, zeigt sich bei der Anwendung im linearen Programm ein unterschiedliches Stabilitätsverhalten der beiden Formulierungen der Hausdorffbedingungen. Darauf wird in den einzelnen Beispielen noch genauer eingegangen werden.

Satz 1.5 :

Zusammen mit den Hausdorffbedingungen für die Folgen der Momente $\{\mu_{i_1, \dots, i_N}^\tau\}_{i_1, \dots, i_N \geq 0}$ und $\{\mu_{i_1, \dots, i_N}\}_{i_1, \dots, i_N \geq 0}$ bildet das Programm (1.22) ein unendlichdimensionales lineares Programm, das äquivalent zur dualen Formulierung (1.5) des Stoppproblems ist.

Beweis:

Die Herleitung des linearen Programms (1.22) aus dem dualen Problem (1.5) ist oben beschrieben. Jeder Folge $\{\mu_{i_1, \dots, i_N}^\tau\}_{i_1, \dots, i_N \geq 0}$ bzw. $\{\mu_{i_1, \dots, i_N}\}_{i_1, \dots, i_N \geq 0}$, die die Hausdorffbedingungen erfüllt, ist eineindeutig ein Maß μ bzw. μ_τ zugeordnet. Aus den Gleichungsnebenbedingungen in (1.22) folgt direkt die Beziehung

$$\int_E f(x) d\mu_\tau(x) - f(x_0) = \int_E Af(x) d\mu(x) \quad \text{für alle Polynome } f \in \mathcal{D}(A).$$

Da die Menge der Polynome auf $[0, 1]^N$ dicht in $\mathcal{D}(A) \subset C([0, 1]^N)$ liegt, folgt diese Gleichung auch für alle Funktionen $f \in \mathcal{D}(A)$ und damit die Gleichungsbedingung in (1.5). Die Übereinstimmung der Zielfunktionale ist offensichtlich, da es sich bei den Funktionen G und Q um Polynome handelt. \square

1.3.4 Approximation durch endlichdimensionale lineare Programme

Für die Theorie unendlichdimensionaler linearer Programme sei auf das Buch von Anderson und Nash [1] verwiesen. Das vorliegende lineare Programm (1.22) mit den Hausdorffbedingungen als weitere Nebenbedingungen verfügt über abzählbar viele Variablen und Nebenbedingungen. Für dieses Programm wird als Lösungsmöglichkeit die Approximation durch endlichdimensionale lineare Programme gewählt.

Der Grundgedanke für diese Approximation ist, anstatt der Momentenfolgen $\{\mu_{i_1, \dots, i_N}^\tau\}_{i_1, \dots, i_N \geq 0}$ und $\{\mu_{i_1, \dots, i_N}\}_{i_1, \dots, i_N \geq 0}$ nur endliche Teilfolgen zu betrachten. Dabei werden die Gleichungsbedingungen in (1.22) nur für $i_1 \leq M_1, \dots, i_N \leq M_N$ berücksichtigt. Es treten also nur die Folgen $\{\mu_{i_1, \dots, i_N}^\tau\}_{i_1 \leq M_1, \dots, i_N \leq M_N}$ und $\{\mu_{i_1, \dots, i_N}\}_{(i_1, \dots, i_N) \in \mathbf{I}}$ mit der Indexmenge

$$\mathbf{I} = \{(i_1, \dots, i_N) \mid i_1 \leq M_1 + J_1, \dots, i_N \leq M_N + J_N\}$$

auf, wobei

$$J_k = \max \left\{ \max_{0 \leq i \leq N} B_k^{(i)}, \max_{0 \leq i, j \leq N} A_k^{(i, j)} \right\}$$

die größte Ordnung aller Polynome $b^{(i)}$ und $a^{(i, j)}$ bzgl. der Dimension k ist. Die Wahl der Zahlen M_i erfolgt dabei so, dass zumindest alle Gleichungsnebenbedingungen aus dem linearen Programm (1.22) aufgenommen werden, in denen die in der Zielfunktion auftretenden Variablen $\mu_{i_1, \dots, i_N}^\tau$ bzw. μ_{i_1, \dots, i_N} vorkommen.

Die Zielfunktion und die Gleichungsnebenbedingungen im endlichdimensionalen linearen Programm haben also folgende Gestalt:

$$\max \sum_{j_1 + \dots + j_N \leq n} g_{j_1, \dots, j_N} \mu_{j_1, \dots, j_N}^\tau + \sum_{j_1 + \dots + j_N \leq m} q_{j_1, \dots, j_N} \mu_{j_1, \dots, j_N} \quad (1.39)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \mu_{i_1, \dots, i_N}^\tau &- \sum_{j_1, \dots, j_N \geq 0} \sum_{k=1}^N i_k b_{j_1, \dots, j_N}^{(k)} \mu_{i_1+j_1, \dots, i_k+j_k-1, \dots, i_N+j_N} \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j_1, \dots, j_N \geq 0} \sum_{k, l=1; k \neq l}^N i_k i_l a_{j_1, \dots, j_N}^{(k, l)} \mu_{i_1+j_1, \dots, i_k+j_k-1, \dots, i_l+j_l-1, \dots, i_N+j_N} \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j_1, \dots, j_N \geq 0} \sum_{k=1}^N i_k (i_k - 1) a_{j_1, \dots, j_N}^{(k, k)} \mu_{i_1+j_1, \dots, i_k+j_k-2, \dots, i_N+j_N} \\ &= \tilde{x}_1^{i_1} \dots \tilde{x}_N^{i_N} \quad \text{für alle } i_1 \leq M_1, \dots, i_N \leq M_N, \end{aligned}$$

wobei n und m die Ordnungen der Polynome G bzw. Q sind (vgl. Voraussetzung (1.15)(ii) auf S. 17).

Von den Hausdorffbedingungen werden nur noch genau diejenigen in das lineare Programm aufgenommen, in denen jeweils nur Elemente der beiden obigen Folgen $\{\mu_{i_1, \dots, i_N}^\tau\}_{i_1 \leq M_1, \dots, i_N \leq M_N}$ bzw. $\{\mu_{i_1, \dots, i_N}\}_{(i_1, \dots, i_N) \in \mathbf{I}}$ vorkommen. Prinzipiell können natürlich auch weitere Hausdorffbedingungen weggelassen werden oder Bedingungen für Momente höherer Ordnung zusätzlich eingefügt werden. Es hat sich jedoch bei den numerischen Untersuchungen gezeigt, dass eine Übereinstimmung in den Ordnungen sinnvoll ist. In den nachfolgenden Beispielen wurde auch, wenn nichts anderes erwähnt wird, so verfahren.

Das Weglassen von Gleichungsnebenbedingungen und Hausdorffbedingungen hat natürlich zur Folge, dass die Menge zulässiger Folgen $\{\mu_{i_1, \dots, i_N}^\tau\}_{i_1 \leq M_1, \dots, i_N \leq M_N}$ und $\{\mu_{i_1, \dots, i_N}\}_{(i_1, \dots, i_N) \in \mathbf{I}}$ im endlichdimensionalen Programm (1.39) größer sein wird als im unendlichdimensionalen linearen Programm (1.22). Damit ist zu erwarten, dass man im endlichdimensionalen Programm auch größere optimale Werte erhält. Allerdings ist für die endlichen Folgen $\{\mu_{i_1, \dots, i_N}^\tau\}_{i_1 \leq M_1, \dots, i_N \leq M_N}$ und $\{\mu_{i_1, \dots, i_N}\}_{(i_1, \dots, i_N) \in \mathbf{I}}$, die im endlichdimensionalen linearen Programm zulässig bzw. optimal sind, nicht mehr gesichert, dass es sich um die ersten Momente von Verteilungen μ_τ bzw. μ handelt. Es besteht jedoch die Vorstellung, mit wachsenden M_i , ähnlich wie im Fall der Berechnung der mittleren Austrittszeiten (vgl. [22]), gute Näherungen für den optimalen Wert des Problems (1.5) und für die Momente von μ_τ und μ zu erhalten und daraus Aussagen über eine optimale Stoppregel abzuleiten.

Betrachtet man die Hausdorffbedingungen bis zu einer gegebenen Ordnung $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_N)$ ohne weitere Nebenbedingungen, so stellt man fest, dass eine ganze Reihe der Bedingungen aus Satz 1.3 bzw. 1.4 weggelassen werden können, ohne dass sich die Menge der zulässigen Folgen $\{\mu_i\}_{i \leq \mathbf{M}}$ ändert. Allerdings hat diese Reduzierung der Zahl der Hausdorffbedingungen weniger für die numerische Realisierung des Verfahrens eine Bedeutung als für Überlegungen im Zusammenhang mit späteren Modifikationen des linearen Programmierungsansatzes.

Lemma 1.6 :

1. Für den Fall $N = 1$ sind die Hausdorffbedingungen bis zur Ordnung M für eine Folge $\{\mu_i\}_{i \geq 0}$ äquivalent zu den Bedingungen

$$(-1)^{M-k} \Delta^{M-k} \mu_k \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad (1.40)$$

$$\sum_{s=0}^{M-k} \binom{M-k}{s} (-1)^s \mu_{k+s} \geq 0 \quad \text{für alle } 0 \leq k \leq M. \quad (1.41)$$

2. Für den Fall $N = 2$ sind die Hausdorffbedingungen bis zur Ordnung (M_1, M_2) für eine Folge $\{\mu_{i,j}\}_{i,j \geq 0}$ äquivalent zu

$$(-1)^{M_1-k+M_2-l} \Delta_1^{M_1-k} \Delta_2^{M_2-l} \mu_{k,l} \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad (1.42)$$

$$\sum_{r=0}^{M_1-k} \sum_{s=0}^{M_2-l} \binom{M_1-k}{r} \binom{M_2-l}{s} (-1)^{r+s} \mu_{k+r, l+s} \geq 0 \quad (1.43)$$

für alle $0 \leq k \leq M_1$ und $0 \leq l \leq M_2$.

3. Für den Fall $N \geq 3$ sind die Hausdorffbedingungen bis zur Ordnung $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_N)$ für eine Folge $\{\mu_j\}_{j \geq 0}$ äquivalent zu den Bedingungen

$$(-1)^{\mathbf{M}-k} \Delta^{\mathbf{M}-k} \mu_k \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad (1.44)$$

$$\sum_{i=0}^{\mathbf{M}-k} \binom{\mathbf{M}-k}{i} (-1)^i \mu_{k+i} \geq 0 \quad (1.45)$$

für alle Multiindizes k mit $0 \leq k \leq \mathbf{M}$ komponentenweise.

Beweis: Die Bedingungen sind offensichtlich notwendig. Man überzeugt sich leicht davon, dass man mit der wiederholten Anwendung der Definitionsgleichungen (1.25) bzw. (1.30) und (1.31) für die iterierten Differenzen und mit den gegebenen Ungleichungen (1.40) bzw. (1.42) alle weiteren Hausdorffbedingungen (1.27) bzw. (1.34) bis zu den gegebenen Ordnungen ableiten kann. Damit sind die Bedingungen (1.40) und (1.42) und folglich die Bedingungen (1.41) sowie (1.43) auch hinreichend. \square

Bemerkung: Im Weiteren wird die Matrix der linken Seite der Nebenbedingungen des linearen Programms (1.35) und aller weiteren Modifikationen davon, inklusive der Hausdorffbedingungen, stets mit B bezeichnet. Die Größe von B hängt dabei neben der Ordnung M auch von der gewählten Form der Hausdorffbedingungen ab. Dabei ist zu beachten, dass in B die Koeffizienten von Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen zusammengefasst sind.

1.3.5 Ein erstes eindimensionales Beispiel

Anhand des nachfolgenden Beispiels soll die Güte des vorgeschlagenen Ansatzes untersucht werden. Es seien $N = 1$, $E = [0, 1]$ und \mathfrak{X} der Standard-Wienerprozess auf E mit Absorption in 0 und 1, d.h.

$$Af(x) = \left(\frac{1}{2} f''(x) \right) \mathbb{1}_{(0,1)}(x) \quad \text{für } f \in C^2([0, 1]).$$

Weiterhin seien $G(x) = 1 - 9x + 59x^2 - 100x^3 + 50x^4$ die Zielgewinnfunktion und $Q \equiv 0$, d.h. es gibt keinen Verlaufsgewinn. Die Funktion G ist so gewählt, dass sie symmetrisch bezüglich 0.5 ist. Eine Darstellung von G befindet sich in Abbildung 1.1 auf S. 32.

Bei der Berücksichtigung der Momente von μ_τ bis zur Ordnung $M \geq 4$ ergeben sich die folgenden Gleichungsnebenbedingungen im linearen Programm (1.39):

$$\mu_i^\tau - \frac{1}{2} i(i-1) \mu_{i-2} = x_0^i \quad \text{für } 2 \leq i \leq M,$$

$$\mu_1^\tau = x_0 \quad \text{und} \quad \mu_0^\tau = 1.$$

Als Zielfunktion erhält man

$$\mu_0^\tau - 9\mu_1^\tau + 59\mu_2^\tau - 100\mu_3^\tau + 50\mu_4^\tau \longrightarrow \max.$$

Dazu kommen noch die Hausdorffbedingungen für die Folgen $\{\mu_i^\tau\}_{i \leq M}$ und $\{\mu_i\}_{i \leq M-2}$. Hierbei kommt es nun darauf an, ob die Formulierung (1.27) oder (1.28) gewählt wird. Die Formulierung (1.28) mit den Binomialkoeffizienten kann direkt erfolgen und liefert $\frac{(M+1)(M+2)}{2} + \frac{(M-1)M}{2}$ zusätzliche Nebenbedingungen. Wird die Formulierung (1.27) mittels iterierter Differenzen verwendet, so müssen die iterierten Differenzen $\Delta^n \mu_i^\tau$ und $\Delta^n \mu_i$ bis zur Ordnung M bzw. $M-2$ als weitere Variablen ins lineare Programm aufgenommen werden. Die Definitionsgleichungen (1.24) bzw. (1.25) ergeben dann zusätzlich $\frac{M(M+1)}{2} + \frac{(M-2)(M-1)}{2}$ Gleichungsnebenbedingungen. Für verschiedene Werte von M ist die Größe des resultierenden linearen Programms für beide Formulierungen in den Tabellen 1.1 und 1.2 angegeben.

Für dieses Beispiel lässt sich die Lösung des Stoppproblems relativ leicht analytisch ermitteln. Die Grundlage dafür ist die Formulierung und Lösung der dem Stoppproblem zugehörigen Variationsungleichungen (vgl. [43] Theorem 10.18). Im Falle des Wienerprozesses ohne Verlaufsgewinn ist v_2 die kleinste konkave Funktion die größer als G ist. Es gilt $v_2 \in C^1([0, 1])$ und v_2 ist außerhalb des Stoppbereiches S in den Intervallen des Fortsetzungsbereiches F jeweils eine lineare Funktion. Für dieses Beispiel erhält man damit folgenden Stoppbereich S :

$$S = \{0\} \cup [x_1, x_2] \cup \{1\},$$

wobei

$$x_1 = \frac{1}{30} \left(20 - \sqrt{46} \right) \approx 0.4405 \quad \text{und} \quad x_2 = 1 - x_1 \approx 0.5594. \quad (1.46)$$

Bemerkung: Der Bereich, in dem die Funktion G konkav ist, d.h. für den $AG(x) \leq 0$ gilt, ist das Intervall $[y_1, y_2]$ mit

$$y_1 = \frac{1}{30} \left(15 - 4\sqrt{3} \right) \approx 0.2690 \quad \text{und} \quad y_2 = 1 - y_1 \approx 0.7309.$$

Das Intervall $[x_1, x_2] = S \setminus \partial E$ ist davon also eine echte Teilmenge.

Die ersten numerischen Resultate werden für den Startwert $x_0 = 0.3$ betrachtet. Es ist $G(x_0) = 1.315$ und $v_2(x_0) = 1.5578$ die exakte Lösung des Stoppproblems. Der Startpunkt x_0 liegt also im Fortsetzungsbereich F und der lokale Fortsetzungsbereich F_{x_0} ist das Intervall $(0, x_1)$.

In den beiden folgenden Tabellen 1.1 und 1.2 werden numerische Resultate für dieses Beispiel bei der Verwendung der Formulierung der Hausdorffbedingungen mit Hilfe der Binomialkoeffizienten und der iterierten Differenzen angegeben. Beide Tabellen zeigen jeweils die Ordnung M der höchsten auftretenden Momente von μ_τ , die Zahl der Variablen und Nebenbedingungen des linearen Programms (1.35) sowie die Konditionszahl der Matrix B der linken Seite des linearen Programms. Die Konditionszahl wird hier im Sinne der $\|\cdot\|_2$ -Norm verwendet, d.h. sie gibt den Quotienten des größten und kleinsten Singulärwertes der Matrix an.

Die angegebenen Konditionszahlen können allerdings nur als grobe Orientierung für das Stabilitätsverhalten bei der Lösung des linearen Programmes dienen, da in der Matrix B Gleichungs-

und Ungleichungsnebenbedingungen zusammengefasst sind und in den einzelnen Simplexschritten das Stabilitätsverhalten im Wesentlichen von der jeweiligen Basisteilmatrix von B abhängig ist. Weiterhin ist zu beachten, dass das verwendete Programm zur Lösung des linearen Programms eine Skalierung der Koeffizientenmatrix B vornimmt (vgl. nächsten Absatz).

Für die Formulierung des linearen Programmes wurde die Modellierungssprache AMPL verwendet. Die Lösung der linearen Probleme erfolgte mit CPLEX². Die beiden letzten Spalten in den Tabellen 1.1 und 1.2 zeigen den optimalen Zielfunktionswert bei Verwendung der Voreinstellung für den CPLEX-Parameter `feasibility` von 10^{-6} (vgl.[26]) und bei einem `feasibility`-Wert von 10^{-8} . Die Angabe (u.i.) an dieser Stelle bedeutet, dass das Ergebnis mit der CPLEX-Warnung `unscaled infeasibilities` ausgegeben wurde. Diese und alle weiteren Rechnungen wurden mit dem Standardwert 0 für den CPLEX-Parameter `scale` durchgeführt, was eine Skalierung der Koeffizientenmatrix B zur Folge hat (equilibration scaling method, vgl. [24] Abschnitt 7.3).

Die Konditionszahlen wurden mit MATLAB 5.3 berechnet.

M	Variablen	Nebenbed.	Konditionszahl	ZFW (feas. 10^{-6})	ZFW (feas. 10^{-8})
10	20	122	562.8832	1.8459	1.8459
11	22	145	1 102.8587	1.8449	1.8450
12	24	170	2 163.7917	1.8111 (u.i.)	1.8007
13	26	197	4 250.5564	1.8037 (u.i.)	1.7888
14	28	226	8 359.0335	1.7806 (u.i.)	1.7687 (u.i.)
20	40	442	492 170.7906	1.7443 (u.i.)	1.7095 (u.i.)
30	60	962	457 072 378.4785	1.7395 (u.i.)	1.7011 (u.i.)

Tabelle 1.1: Numerische Resultate für $x_0 = 0.3$ bei Verwendung der Binomialkoeffizienten

M	Variablen	Nebenbed.	Konditionszahl	ZFW (feas. 10^{-6})	ZFW (feas. 10^{-8})
10	111	213	45.0333	1.8459	1.8459
11	133	256	55.0273	1.8449	1.8450
12	157	303	66.0227	1.8007	1.8007
13	183	354	78.0192	1.7888	1.7888
14	211	409	91.0165	1.7696	1.7666
20	421	823	190.0079	1.7066	1.7004
30	931	1833	435.0034	1.6864	1.6505

Tabelle 1.2: Numerische Resultate für $x_0 = 0.3$ bei Verwendung der iterierten Differenzen

Zunächst lässt sich feststellen, dass die Formulierung der Hausdorffbedingungen mit den iterierten Differenzen zu deutlich besser konditionierten Problemen führt als die Formulierung mit Binomialkoeffizienten. Das äußert sich u.a. im häufigen Auftreten der Warnung `unscaled infeasibilities` bei größeren Werten von M in Tabelle 1.1. Diese Resultate können nicht mehr uneingeschränkt zur Interpretation herangezogen werden. Die Formulierung mittels iterierter Differenzen führt zwar zu größeren linearen Programmen, diese sind jedoch schwächer

²Soweit nicht anders angegeben, sind die Resultate mit AMPL/CPLEX 6.5 unter Linux 2.2 auf einem Intel PC ermittelt worden.

besetzt als die vergleichbaren Programme mit den Binomialkoeffizienten. Ein großer Unterschied bzgl. der Rechenzeiten ist nicht auszumachen. Im Weiteren wird in allen Beispielen die günstigere Formulierung der Hausdorffbedingungen mittels iterierter Differenzen verwendet und nicht mehr gesondert darauf hingewiesen.

Daneben ist es denkbar, im linearen Programm (1.35) nur die reduzierten Hausdorffbedingungen gemäß Lemma 1.6 zu fordern und damit die Zahl der Nebenbedingungen deutlich zu reduzieren. Die numerischen Resultate sind in Tabelle 1.3 analog zu den Tabellen 1.1 und 1.2 angegeben.

M	Variablen	Nebenbed.	Konditionszahl	ZFW (feas. 10^{-6})	ZFW (feas. 10^{-8})
10	111	122	2 045.4198	1.8459	1.8459
11	133	145	4 382.8855	1.8450	1.8450
12	157	170	9 341.8822	1.8007	1.8007
13	183	197	19 821.2514	1.7888	1.7888
14	211	226	41 888.2894	1.7694	1.7666
20	421	442	3 505 550.7155	1.7072(u.i.)	1.7072
30	931	962	4 879 006 969.0716	1.8954(u.i.)	1.6504

Tabelle 1.3: Numerische Resultate für $x_0 = 0.3$ bei Verwendung der iterierten Differenzen und der reduzierten Hausdorffbedingungen

Diese Formulierung führt also zu deutlich schlechter konditionierten Matrizen auf der linken Seite der Nebenbedingungen im linearen Programm. Die Konditionszahlen sind sogar noch größer als bei der Formulierung der Hausdorffbedingungen mit den Binomialkoeffizienten. Die direkte Vergleichbarkeit ist allerdings nicht gegeben, da sich die Zeilen- bzw. Spaltenzahl der Matrizen für gleiche Werte von M unterscheiden.

Die großen Konditionszahlen sind jedoch ein Hinweis darauf, dass die reduzierten Hausdorffbedingungen zu deutlich instabileren linearen Programmen führen. Die numerischen Resultate bestätigen diese Aussage. Deutlich wird das u.a. beim Resultat für $M = 30$ und **feasibility** = 10^{-6} . Dieses Ergebnis fällt sichtbar aus dem Rahmen und variiert sehr stark bei weiteren Rechnungen mit den gleichen Parametern. Es treten dabei z.B. Zielfunktionswerte größer als 2 auf. Alle anderen Resultate aus Tabelle 1.3 stimmen mit denen aus Tabelle 1.2 annähernd überein. Da auch die Matrix, die alleine durch die reduzierten Hausdorffbedingungen mit den iterierten Differenzen erzeugt wird, deutlich schlechter konditioniert ist als die entsprechende Matrix mit allen Hausdorffbedingungen mit iterierten Differenzen (vgl. Tabelle 1.4), wird in allen weiteren Beispielen darauf verzichtet, die reduzierte Form der Hausdorffbedingungen zu verwenden.

Generell erweist es sich als günstig, den CPLEX-Parameter **feasibility** abweichend von der Standardeinstellung auf 10^{-8} herabzusetzen. Das führt in einigen Fällen dazu, dass die Warnung **unscaled infeasibilities** nicht mehr auftritt. In jedem Fall wird auch weiterhin eine Lösung gefunden, die Rechenzeit verlängert sich nur unwesentlich. Im Weiteren wird deshalb stets dieser Wert verwendet und nur im Fall einer Abweichung ausdrücklich angegeben. Die weiteren Auswertungen dieses Beispiels beziehen sich darum hier auf die Rechnungen, die der letzten Spalte aus Tabelle 1.2 zugrunde liegen.

Im Vergleich zu den Resultaten bei der Berechnung von Austrittszeiten mit dem linearen Programmierungsansatz in [22] sind hier die Resultate vergleichsweise schlecht. Wie auch in [22]

M	alle Hausdorffbedingungen	reduzierte Hausdorffbedingungen
10	3.0764	1 936.6237
11	3.0890	3 798.2356
12	3.0990	7 458.5166
13	3.1071	14 662.3699
14	3.1138	28 852.8868
20	3.1366	1 702 741.1612
30	3.1501	1 583 427 975.7019

Tabelle 1.4: Konditionszahlen der Matrizen die sich aus allen Hausdorffbedingungen sowie den reduzierten Hausdorffbedingungen mit den iterierten Differenzen ergeben

kann man deutlich erkennen, dass die Erhöhung der maximalen Ordnung M der Momente zu einer deutlichen Verbesserung des Ergebnisses führt, jedoch liegt selbst im Fall $M = 30$ das Ergebnis des linearen Programms noch um rund 6 % über dem korrekten Wert. Bei einer weiteren Erhöhung von M tritt dann auch für die Formulierung mit den iterierten Differenzen die Warnung `unscaled infeasibilities` auf, so dass zunächst auf diese Resultate nicht zurückgegriffen werden soll.

Auch für andere Startwerte x_0 ergeben sich ähnliche unbefriedigende Ergebnisse. Die Abbildung 1.1 zeigt die Zielgewinnfunktion G und die Funktion v_1 . Die numerischen Resultate für die Zielfunktionswerte des linearen Programms sind durch Punkte gekennzeichnet. Dabei variiert der Startwert x_0 in 0.01-Schritten von 0 bis 1.

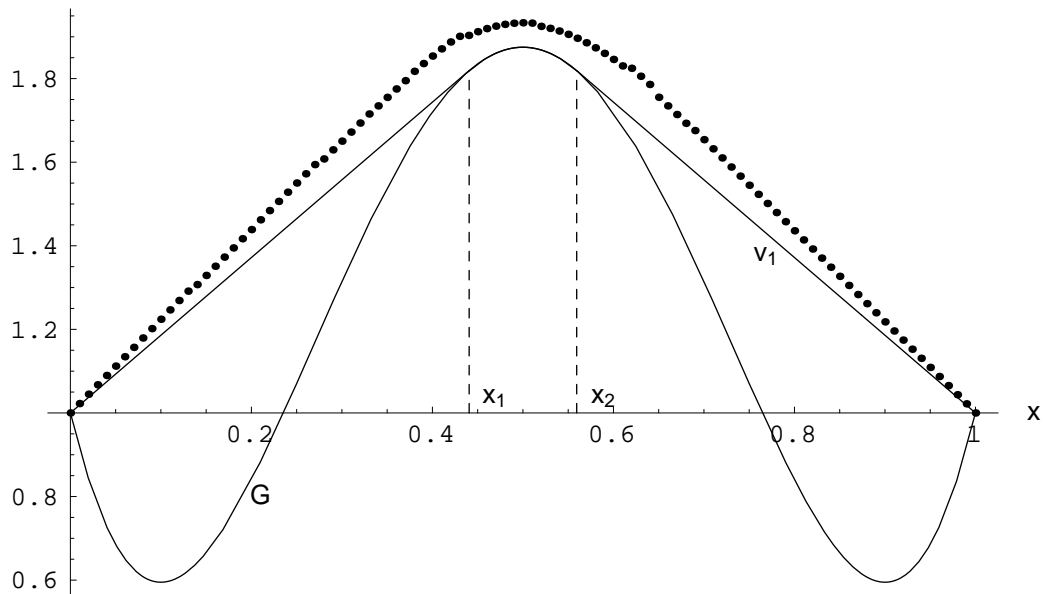


Abbildung 1.1: Numerische Resultate für die Zielfunktionswerte mit iterierten Differenzen bei maximaler Ordnung $M = 30$

Man erkennt, dass die Abweichung der numerischen Resultate von der exakten Lösung v_1 vom Rand des Intervalls $[0, 1]$ her zunimmt. Insbesondere ist bemerkenswert, dass auch innerhalb des Intervalls $[x_1, x_2]$, wo $v_1(x) = G(x)$ gilt, relativ große Abweichungen auftreten. Die Zugehörigkeit

eines Punktes $x_0 \in E$ zum Stoppbereich S kann also nicht anhand der numerischen Resultate erkannt werden.

Diese schlechten Werte sind zunächst insbesondere deshalb überraschend, da für das Beispiel eines Wienerprozesses der lineare Programmierungsansatz für die Berechnung der Austrittszeit (vgl. [22]) schon allein durch die Auswertung der Gleichungsnebenbedingungen im linearen Programm zu den korrekten Momenten des Aufenthaltsmaßes μ und damit zum richtigen Zielfunktionswert führt.

Unter der Annahme, dass für den gegebenen Startpunkt $x_0 = 0.3$ die Randpunkte 0 und $x_1 = 0.4405$ des lokalen Fortsetzungsbereiches F_{x_0} bekannt sind und damit auch der Träger des Maßes μ_τ , ergeben sich folgende Gleichungsbedingungen im linearen Programm:

$$\begin{aligned} p x_1^i - \frac{1}{2} i(i-1) \mu_{i-2} &= x_0^i \quad \text{für } i \geq 2 \quad \text{und} \\ p x_1 &= x_0 \quad \text{d.h.} \quad p = \frac{x_0}{x_1}. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Hierbei ist p die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess in x_1 den Rand von F_{x_0} erreicht. Damit folgt

$$\begin{aligned} \mu_{i-2} &= 2 x_0 \frac{x_1^{i-1} - x_0^{i-1}}{i(i-1)} \quad \text{für } i \geq 2 \quad \text{bzw.} \\ \mu_i &= 2 x_0 \frac{x_1^{i+1} - x_0^{i+1}}{(i+1)(i+2)} \quad \text{für } i \geq 0. \end{aligned}$$

Es ergeben sich also in diesem Fall geschlossene Ausdrücke für die Variablen μ_i , ohne dass die Hausdorffbedingungen benötigt werden.

Im Vergleich dazu betrachten wir die Momente einer unsymmetrischen Dreiecksverteilung ν auf einem Intervall $[\hat{x}_1, \hat{x}_2]$, deren Dichte f ihr Maximum im Punkt $x_0 \in [\hat{x}_1, \hat{x}_2]$ annimmt und dort den Wert c hat. Es ist also

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x_0 - \hat{x}_1} (x - \hat{x}_1) & \text{für } x \in [\hat{x}_1, x_0] \\ \frac{c}{\hat{x}_2 - x_0} (\hat{x}_2 - x) & \text{für } x \in [x_0, \hat{x}_2] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei muss es sich nicht um ein Wahrscheinlichkeitsmaß handeln.

Für die Momente ν_n von ν berechnet man

$$\nu_n = \frac{c}{(n+1)(n+2)} \left[\frac{\hat{x}_1^{n+2} - x_0^{n+2}}{x_0 - \hat{x}_1} + \frac{\hat{x}_2^{n+2} - x_0^{n+2}}{\hat{x}_2 - x_0} \right].$$

Speziell erhält man für die Randpunkte $\hat{x}_1 = 0$ und $\hat{x}_2 = x_1$

$$\nu_n = \frac{c x_1}{x_1 - x_0} \frac{x_1^{n+1} - x_0^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

Hier ist die Übereinstimmung mit den oben berechneten Werten für μ_i offensichtlich. Da das Maß ν eindeutig durch die Folge der Momente $\{\nu_n\}_{n \geq 0}$ bestimmt ist, handelt es sich beim Aufenthaltsmaß μ um eine unsymmetrische Dreiecksverteilung auf dem Intervall $[0, x_1]$, deren Dichte f ihr Maximum im Punkt x_0 annimmt. Für den Wert $c = f(x_0)$ gilt

$$2x_0 = \frac{c x_1}{x_1 - x_0}, \quad \text{d.h.} \quad c = \frac{2x_0}{x_1} (x_1 - x_0) \approx 0.1914.$$

Die Momente von μ_τ und μ sind also bekannt und können mit den numerischen Werten verglichen werden. Der nachfolgenden Tabelle 1.5 liegt die Rechnung zum vorletzten Wert der letzten Spalte aus Tabelle 1.2 zugrunde, d.h. es ist $x_0 = 0.3$ und $M = 20$. In der zweiten und dritten Spalte von Tabelle 1.5 stehen die exakten Werte für die Momente von μ_τ und die Werte, die das lineare Programm liefert. In den beiden letzten Spalten befinden sich die entsprechenden Werte für das Aufenthaltsmaß μ .

Ordnung n	μ_n^τ (exakt)	μ_n^τ (numerisch)	μ_n (exakt)	μ_n (numerisch)
0	1	1	0.0421767	0.0385928
1	0.3	0.3	0.0104119	0.00819214
2	0.132177	0.128593	0.00292633	0.00188692
3	0.0582356	0.0515764	0.000887462	0.000471232
4	0.025658	0.0194215	0.000283446	0.000147803
5	0.0113046	0.00714232	$9.40827 \cdot 10^{-5}$	$7.06758 \cdot 10^{-5}$
6	0.00498069	0.00294605	$3.2187 \cdot 10^{-5}$	$4.7621 \cdot 10^{-5}$
7	0.00219444	0.00170289	$1.12861 \cdot 10^{-5}$	$3.67499 \cdot 10^{-5}$
8	0.000966845	0.001399	$4.03951 \cdot 10^{-6}$	$2.95579 \cdot 10^{-5}$
9	0.000425981	0.00134268	$1.47126 \cdot 10^{-6}$	$2.42533 \cdot 10^{-5}$
10	0.000187683	0.00133601	$5.43959 \cdot 10^{-7}$	$2.02299 \cdot 10^{-5}$
11	$8.26909 \cdot 10^{-5}$	0.0013357	$2.03749 \cdot 10^{-7}$	$1.71224 \cdot 10^{-5}$
12	$3.64327 \cdot 10^{-5}$	0.0013357	$7.71916 \cdot 10^{-8}$	$1.46775 \cdot 10^{-5}$
13	$1.60518 \cdot 10^{-5}$	0.0013357	$2.95392 \cdot 10^{-8}$	$1.27208 \cdot 10^{-5}$
14	$7.07227 \cdot 10^{-6}$	0.0013357	$1.14046 \cdot 10^{-8}$	$1.11308 \cdot 10^{-5}$
15	$3.11596 \cdot 10^{-6}$	0.0013357	$4.43805 \cdot 10^{-9}$	$9.82134 \cdot 10^{-6}$
16	$1.37286 \cdot 10^{-6}$	0.0013357	$1.73928 \cdot 10^{-9}$	$8.73008 \cdot 10^{-6}$
17	$6.04867 \cdot 10^{-7}$	0.0013357	$6.85963 \cdot 10^{-10}$	$7.81113 \cdot 10^{-6}$
18	$2.66498 \cdot 10^{-7}$	0.0013357	$2.72091 \cdot 10^{-10}$	$7.03002 \cdot 10^{-6}$
19	$1.17416 \cdot 10^{-7}$	0.0013357		
20	$5.17322 \cdot 10^{-8}$	0.0013357		

Tabelle 1.5: Numerische Resultate und exakte Werte für die Momente von μ_τ und μ bis zur Ordnung 20 bzw. 18 für den Startwert $x_0 = 0.3$

Hier sind die Abweichungen z.T. noch erheblicher als bei den Zielfunktionswerten. Bis zur Ordnung $n = 7$ für μ_τ bzw. $n = 5$ für μ sind die numerischen Werte für die Momente zu klein,

danach liegen sie teilweise deutlich über den exakten Werten. Auffällig ist, dass ab $n = 11$ die numerischen Werte für die Momente von μ_τ nicht weiter abfallen, obwohl sich die exakten Werte gemäß einer geometrischen Folge entwickeln.

1.4 Die Verfeinerung des Algorithmus im eindimensionalen Fall

Beim linearen Programmierungsansatz für die Berechnung der Austrittszeiten (vgl. [22]) ist im Gegensatz zum Stoppproblem der Träger des Maßes μ_τ zum Austrittszeitpunkt bekannt (und zwar der Rand ∂E). Im eindimensionalen Fall reduziert sich damit für $E = [0, 1]$ die benötigte Information über μ_τ auf die Wahrscheinlichkeit $p = \mu_1^\tau$, dass der Prozess \mathfrak{X} bei 1 austritt. Diese Wahrscheinlichkeit geht auch als einzige Variable neben den Momenten des Aufenthaltsmaßes μ in das lineare Programm ein (vgl. auch [22] Abschnitte 3 und 4). Für den höherdimensionalen Fall werden die Momente von geeignet gewählten Maßen auf ∂E ins lineare Programm aufgenommen (vgl. z.B. Abschnitt 6 in [22]).

Vergleicht man im eindimensionalen Fall die unendlichdimensionalen linearen Programme und deren endlichdimensionale Approximationen für ein Stoppproblem sowie für die Berechnung der Austrittszeit von \mathfrak{X} aus E , so stellt man fest, dass die Gleichungsnebenbedingungen von ähnlicher Struktur sind und in ihrer Anzahl übereinstimmen. Der oben erwähnten größeren Anzahl von Variablen im linearen Programm zum Stoppproblem stehen als zusätzliche Nebenbedingungen lediglich die Hausdorffbedingungen für die Momente μ_i^τ gegenüber. Der zulässige Bereich dieses linearen Programms wird offensichtlich bei der gewählten Ordnung M der Approximation nicht hinreichend eingeschränkt. Da eine weitere Erhöhung von M nicht ohne weiteres möglich ist (zunehmende Rechenzeiten und numerische Instabilitäten – vgl. z.B. Tabellen 1.1 und 1.2) sind andere Methoden zur Verbesserung der numerischen Resultate notwendig. In Anbetracht der Situation bei der Berechnung der Austrittszeiten scheint insbesondere die Eingrenzung bzw. die Identifizierung des Trägers von μ_τ eine denkbare Möglichkeit zu sein.

Wie sich dabei die bereits vorliegende Lösung des linearen Programmes (1.39) nutzen lässt, soll im folgenden Abschnitt gezeigt werden.

1.4.1 Hausdorffpolytope und Rücktransformation

Für eine gegebene reellwertige Funktion u auf $E = [0, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit

$$B_{n,u}(x) := \sum_{j=0}^n u_j^{(n)} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \quad (1.48)$$

das Bernsteinpolynom von u der Ordnung n , wobei $u_j^{(n)} := u(\frac{j}{n})$ ist (vgl. [45], [18]). Speziell ergibt sich für die konstante Funktion $u(x) = 1$

$$B_{n,u}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} = 1 \quad (1.49)$$

für alle $x \in E$.

Sei X eine Zufallsgröße auf $[0, 1]$ mit Verteilungsfunktion F und Momenten $\{\mu_i\}_{i \geq 0}$. Dann liefert die Integration der Definitionsgleichung (1.48) bzgl. F aufgrund der Beziehung (1.26)

$$\mathbf{E}_F B_{n,u} = \sum_{j=0}^n u_j^{(n)} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \Delta^{n-j} \mu_j. \quad (1.50)$$

Wir definieren den Vektor $\mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \dots, p_n^{(n)})$ durch

$$p_j^{(n)} := \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \Delta^{n-j} \mu_j \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, n.$$

Dann ist für $u(x) \equiv 1$ wegen Gleichung (1.49) $\mathbf{E}_F B_{n,u} = 1$ und damit $\sum_{j=0}^n p_j^{(n)} = 1$. Damit kann der Vektor $\mathbf{p}^{(n)}$, insbesondere auch wegen der Beziehung (1.50), als eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung $F^{(n)}$ auf den Punkten $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ aufgefasst werden.

Die folgende Aussage ist nun von zentraler Bedeutung (vgl. z.B. [45] S.8 f. und [18]):

Satz 1.7 :

Sei u eine stetige Funktion auf $E = [0, 1]$ und F eine Verteilungsfunktion auf E , dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Die Bernsteinpolynome $B_{n,u}$ konvergieren gleichmäßig gegen die Funktion u .
2. Es gilt

$$F^{(n)}(x) := \sum_{j \leq nx} p_j^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x) \quad (1.51)$$

für alle Punkte $x \in E$ an denen F stetig ist.

Bemerkungen:

1. Die lineare Abbildung $R^{(n)}$, die der Folge $\{\mu_i\}_{i=0}^n$ den Vektor $\mathbf{p}^{(n)}$ zuordnet, wird im Weiteren auch als Rücktransformation bezeichnet.
2. Die Rücktransformation $R^{(n)}$ kann auch auf beliebige Folgen $\underline{m} = \{m_i\}_{i=0}^n$, die nicht Folgen von Momenten einer Verteilung F auf $[0, 1]$ sind, angewandt werden. Sobald $m_0 = 1$ gilt, ist

$$\sum_{i=0}^n R^{(n)}(\underline{m})_i = 1. \quad (1.52)$$

3. Die Aussage von Satz 1.7 kann auf beliebige endliche Maße auf E übertragen werden. Ist neben den Voraussetzungen (1.1) und (1.15) auch die Definitheitseigenschaft (1.18) für den Diffusionsanteil $a(x)$ des infinitesimalen Generators A erfüllt, so besitzt das Aufenthaltsmaß μ eine stetige Dichte (vgl. Krylov [31] Abschnitt 2.2). Dann lässt sich die obige Konvergenzaussage auf das Maß μ anwenden. Allerdings müssen die Momente von μ bekannt sein, um die Bernsteinpolynome zu bilden.
4. Für das Problem (1.5) bereitet eine Konvergenzaussage, die auf Satz 1.7 aufbaut auch deshalb sehr große Schwierigkeiten, da die Lösung (μ, μ_τ) nicht in jedem Fall eindeutig ist. Das betrifft sowohl degenerierte Probleme, für die $AG + Q \equiv 0$ gilt, als auch Probleme wie der Fall $q = 3.5$ im ersten Teil von Abschnitt 1.5.1. Da für die zweite Art von Problemen keine vernünftige Charakterisierung anhand der Ausgangsgrößen bekannt ist, ist es bereits sehr schwer, vernünftige Voraussetzungen für eine Konvergenzaussage zu formulieren. Darüber hinaus setzt der Algorithmus, der im nächsten Abschnitt vorgeschlagen wird, auch nicht auf eine Konvergenz $M \rightarrow \infty$ für die Ordnung M .

Der Grundgedanke für die Verfeinerung des linearen Programmierungsansatzes ist nun, die Rücktransformation auf die Werte $\{\mu_i^\tau\}_{i=0}^M$, die man als Lösung des linearen Programmes (1.39) erhält, anzuwenden und daraus Rückschlüsse auf den Träger von μ_τ zu ziehen.

Dabei spielen geometrische Überlegungen im Zusammenhang mit dem Momentenraum und den sogenannten Hausdorffpolytopen eine wichtige Rolle.

Definitionen:

1. Die Menge \mathcal{M}_∞ aller Folgen $\{\mu_i\}_{i \geq 0}$, deren Folgenglieder Momente einer Verteilung F auf $[0, 1]$ sind, heißt Momentenraum.
2. Die Menge $\mathcal{M}_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aller Folgen $\{\mu_i\}_{i=0}^n$, deren Glieder die ersten $n+1$ Momente einer Verteilung F auf $[0, 1]$ sind, heißt Momentenraum der Ordnung n .
3. Die Menge $\mathcal{H}_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aller Folgen $\{m_i\}_{i=0}^n$ mit $m_0 = 1$, die die Hausdorffbedingungen bis zur Ordnung n erfüllen, heißt Hausdorffpolytop der Ordnung n .

Bemerkung: Es gilt $\mathcal{M}_n \subsetneq \mathcal{H}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es ist $\bigcap_{n \geq 0} \mathcal{H}_n = \mathcal{M}_\infty$.

Im Zusammenhang mit der Rücktransformation $R^{(n)}$ hat das Hausdorffpolytop \mathcal{H}_n eine klare Gestalt.

Lemma 1.8 :

Das Hausdorffpolytop \mathcal{H}_n hat $n+1$ Eckpunkte. Der k -te Eckpunkt hat die Koordinaten

$$\underline{\mu}^{(k)} = \left(\mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \dots, \mu_n^{(k)} \right) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \left(\binom{n}{k}, \binom{n-1}{k-1}, \dots, \binom{n-k}{0}, 0, \dots, 0 \right),$$

wobei $k = 0, 1, \dots, n$.

Beweis:

Für einen Vektor $\underline{\mu} = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathcal{H}_n$ gilt wegen Lemma 1.6

$$\sum_{s=0}^{n-l} \binom{n-l}{s} (-1)^s \mu_{l+s} \geq 0 \quad \text{für alle } 0 \leq l \leq n. \quad (1.53)$$

Weiterhin muss $\mu_0 = 1$ sein, womit μ_0 fixiert ist. Der Vektor $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ muss also $n+1$ lineare Ungleichungen erfüllen, damit $\underline{\mu} \in \mathcal{H}_n$ gilt. Damit werden in den Eckpunkten von \mathcal{H}_n mindestens n der obigen Ungleichungen (1.53) als Gleichheit angenommen. Da die angegebenen Punkte $\underline{\mu}^{(k)}$ paarweise voneinander verschieden sind, genügt es zu zeigen, dass sie jeweils n Gleichungen erfüllen und die verbleibende Ungleichung als strikte Ungleichung angenommen wird.

Durch sukzessives Einsetzen der letzten Gleichung $\mu_n = 0$ in die vorangehenden Gleichungen erhält man $\mu_{n-1} = 0$, $\mu_{n-2} = 0$ usw. bis zu der echten Ungleichung. Damit muss die oben angegebene k -te Ecke von \mathcal{H}_n dadurch charakterisiert sein, dass die $(k+1)$ -te Ungleichung aus (1.53) als strikte Ungleichung angenommen wird.

Sei nun $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ gegeben. Es gilt $\mu_0^{(k)} = 1$. Wegen $\mu_n^{(k)} = \mu_{n-1}^{(k)} = \dots = \mu_{k+1}^{(k)} = 0$ ³ haben die ersten $k+1$ Ungleichungen aus (1.53), die von $\underline{\mu}^{(k)}$ erfüllt werden müssen, folgende Form

$$\sum_{s=0}^{k-l} \binom{n-l}{s} (-1)^s \mu_{l+s}^{(k)} \geq 0 \quad \text{für alle } 0 \leq l \leq k. \quad (1.54)$$

Es ist $\mu_k^{(k)} = \binom{n}{k}^{-1} > 0$, die $(k+1)$ -te Ungleichung in (1.53) wird also wirklich als strikte Ungleichung angenommen. Es bleibt also zu zeigen, dass die Zahlen $\mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \dots, \mu_k^{(k)}$ die Ungleichungen (1.54) für $0 \leq l \leq k-1$ als Gleichung erfüllen.

Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{k-l} \binom{n-l}{s} (-1)^s \mu_{l+s}^{(k)} &= \binom{n}{k}^{-1} \sum_{s=0}^{k-l} \binom{n-l}{s} (-1)^s \binom{n-l-s}{k-l-s} \\ &= \binom{n}{k}^{-1} \sum_{s=0}^m \binom{N}{s} (-1)^s \binom{N-s}{m-s}, \end{aligned}$$

wobei $N := n-l$ und $m := k-l$. Wegen $\binom{N}{s} \binom{N-s}{m-s} = \binom{m}{s} \binom{N}{m}$ folgt damit

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{k-l} \binom{n-l}{s} (-1)^s \mu_{l+s}^{(k)} &= \binom{n}{k}^{-1} \binom{N}{m} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (-1)^s \\ &= \binom{n}{k}^{-1} \binom{N}{m} (1-1)^m = 0 \end{aligned}$$

³Für $k = n$ meint diese Schreibweise, dass keines der μ_k Null wird.

für $m \geq 1$. □

Lemma 1.9 :

Der k -te Eckpunkt $\underline{\mu}^{(k)}$ des Hausdorffpolytops \mathcal{H}_n wird durch die Rücktransformation $R^{(n)}$ auf den $(k+1)$ -ten Einheitsvektor $e_{k+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ abgebildet.

Beweis:

Wegen Lemma 1.6 wird das Hausdorffpolytop \mathcal{H}_n durch $n+1$ Ungleichungsbedingungen beschrieben. Davon sind in der k -ten Ecke genau n Stück aktiv, d.h. es ist für n verschiedene $j \in \{0, \dots, n\}$

$$(-1)^{n-j} \triangle^{n-j} \mu_j^{(k)} = 0.$$

Damit ist für diese j

$$R^{(n)}(\underline{\mu}^{(k)})_j = \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \triangle^{n-j} \mu_j^{(k)} = 0.$$

Wegen der Bedingung $\mu_0^{(k)} = 1$ und der Gleichung (1.52) muss für das verbleibende $i \in \{0, \dots, n\}$

$$R^{(n)}(\underline{\mu}^{(k)})_i = 1$$

gelten. Es ist weiterhin

$$\begin{aligned} R^{(n)}(\underline{\mu}^{(k)})_k &= \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \triangle^{n-k} \mu_k^{(k)} \\ &= \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \sum_{s=0}^{n-k} \binom{n-k}{s} (-1)^{n-k-s} \mu_{k+s}^{(k)} \\ &= \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \binom{n-k}{0} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}^{-1} \binom{n-k}{0}, \end{aligned}$$

da alle weiteren Summanden in der Summe Null sind. Also ist $R^{(n)}(\underline{\mu}^{(k)})_k = 1$ und damit gilt $i = k$ und $R^{(n)}(\underline{\mu}^{(k)}) = e_{k+1}$. □

Das Bild unter $R^{(n)}$ der Ecke $\underline{\mu}^{(k)}$ des Hausdorffpolytops \mathcal{H}_n kann also als Diracmaß auf dem Punkt $\frac{k}{n}$ interpretiert werden. Die Menge $R^{(n)}(\mathcal{H}_n)$ lässt sich dementsprechend als die Menge aller diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ interpretieren.

Bemerkungen:

1. Die Rücktransformation liefert auch für Punkte aus $\mathcal{H}_n \setminus \mathcal{M}_n$ entsprechende diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen, obwohl sie nicht Folgen von Momenten einer Wahrscheinlichkeitsverteilung sind.

2. Die Momente bis zur Ordnung n von $R^{(n)}(\underline{\mu})$ für $\underline{\mu} \in \mathcal{H}_n$ stimmen im Allgemeinen nicht mit $\underline{\mu}$ überein.

Eine grafische Veranschaulichung der Hausdorffpolytope kann man in [3] finden. Dort sind die Projektionen der Hausdorffpolytope \mathcal{H}_n auf die Komponenten (μ_1, μ_2, μ_3) und andere Tripel (μ_i, μ_j, μ_k) mit $i < j < k \leq n$ dargestellt und es wird u. a. die Konvergenz für $n \rightarrow \infty$ der Projektionen auf (μ_1, μ_2, μ_3) gegen den Momentenraum \mathcal{M}_3 der Ordnung 3 in einer grafischen Animation verdeutlicht.

Sowohl mit diesen grafischen Darstellungen als auch durch Auswertung der Hausdorffbedingungen lässt sich erkennen, dass für alle $n > 1$ die Eckpunkte $\underline{\mu}^{(1)}, \dots, \underline{\mu}^{(n-1)}$ des Hausdorffpolytops \mathcal{H}_n außerhalb des Momentenraumes \mathcal{M}_n der Ordnung n liegen. Dasselbe gilt auch für die Kanten, die jeweils zwei dieser Eckpunkte verbinden. Demgegenüber sind die Ecken $\underline{\mu}^{(0)} = (1, 0, \dots, 0)$ und $\underline{\mu}^{(n)} = (1, 1, \dots, 1)$ sowie die Kante zwischen $\underline{\mu}^{(0)}$ und $\underline{\mu}^{(n)}$ in \mathcal{M}_n enthalten. Für den Momentenraum \mathcal{M}_∞ gilt, dass er die Folgen $(1, 0, 0, \dots)$ und $(1, 1, 1, \dots)$ sowie ihre konvexe Hülle enthält. Diese konvexe Hülle entspricht aber genau den Wahrscheinlichkeitsmaßen, die nur Masse auf den Punkten 0 und 1 haben. Nur solche Maße treten als Verteilung des Prozesses \mathfrak{X} zum Zeitpunkt des Austritts aus dem Intervall $[0, 1]$ auf. Obwohl bei der Formulierung des linearen Programms für die Berechnung der mittleren Austrittszeiten (vgl. [22]) keine Hausdorffbedingungen für die Momente dieser Verteilung aufgestellt werden, ist diese Folge stets in den entsprechenden Momentenräumen \mathcal{M}_n enthalten. Im Gegensatz dazu ist das für die Folge $\{\mu_i^\tau\}_{i \leq n}$ in der eindimensionalen Version des linearen Programmes (1.39) trotz der Formulierung der Hausdorffbedingungen für $\{\mu_i^\tau\}_{i \leq n}$ nicht automatisch der Fall. Darin ist die Hauptursache für die in diesem Beispiel beobachteten relativ schlechten Resultate des linearen Programmes (1.39) zu sehen.

1.4.2 Die Anwendung der Rücktransformation

Im eindimensionalen Fall gilt für die Lösung $(\underline{\mu}_\tau, \underline{\mu}) := (\{\mu_i^\tau\}_{i \leq M}, \{\mu_i\}_{i \leq \tilde{M}})$ des linearen Programmes (1.39) bei maximaler Ordnung M

$$\{\mu_i^\tau\}_{i \leq M} \in \mathcal{H}_M \subseteq \mathcal{H}_n$$

für $n \leq M$. Dabei sind $\tilde{M} := M + \max\{B_1 - 1, A_1 - 2\}$ sowie B_1 und A_1 die Ordnungen der Polynome $b^{(1)}$ bzw. $a^{(1,1)}$.

Die Rücktransformation $R^{(n)}$ mit $n \leq M$ angewandt auf $\underline{\mu}_\tau$ liefert also eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$. Es besteht nun die Möglichkeit, anhand der Gewichte die unter $R^{(n)}(\underline{\mu}_\tau)$ auf diese Punkte verteilt werden, Rückschlüsse auf den Träger von μ_τ zu ziehen. Mit dieser Trägerinformation kann man dann eine disjunkte Überdeckung $\left\{E_j^{\mu_\tau}\right\}_{j=1, \dots, m}$ von E gemäß der nachfolgenden Idee wählen und ein verfeinertes lineares Programm formulieren und lösen.

Bemerkung: Die Gültigkeit von Satz 1.1 und Satz 1.2 bleibt erhalten, wenn die Maße μ und μ_τ als geeignete Summe von Maßen $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots, \mu^{(l)}$ und $\mu_\tau^{(1)}, \mu_\tau^{(2)}, \dots, \mu_\tau^{(m)}$ geschrieben werden.

Auf dieser Aussage basierend kann man unabhängig von der Dimension N des Stoppproblems die folgende Grundidee für eine Verfeinerung des linearen Programmierungsansatzes formulieren.

Wählt man disjunkte Überdeckungen $\{E_j^\mu\}_{j=1,\dots,l}$ und $\{E_j^{\mu_\tau}\}_{j=1,\dots,m}$ sowie die Maße $\mu^{(j)} = \mu|_{E_j^\mu}$ und $\mu_\tau^{(j)} = \mu_\tau|_{E_j^{\mu_\tau}}$, so erfolgt die Formulierung eines verfeinerten linearen Programmes für Problem (1.5) nach den folgenden Schritten:

1. In den Gleichungsnebenbedingungen werden die Momente μ_i und μ_i^τ durch die Summen der Momente $\mu_i^{(j)}$ bzw. $\mu_{\tau,i}^{(j)}$ der Teilmaße $\mu^{(j)}$ und $\mu_\tau^{(j)}$ ersetzt.
2. Alle Maße $\mu^{(j)}$, $\mu_\tau^{(j)}$ werden so transformiert, dass sie ihren Träger auf E haben.
3. Für jedes dieser transformierten Maße werden wiederum die Hausdorffbedingungen bis zu einer bestimmten Ordnung aufgestellt.

Bemerkungen:

1. Die Maße $\mu_\tau^{(j)}$ sind dann im Allgemeinen keine Wahrscheinlichkeitsmaße mehr.
2. Um sicherzustellen, dass das verfeinerte Programm ebenfalls linear ist, kommen im Punkt 2 allerdings nur lineare Transformationen in Frage. Da die transformierten Maße ihren Träger wiederum auf E haben müssen, um die Hausdorffbedingungen formulieren zu können, sind damit auch nur bestimmte disjunkte Überdeckungen von E möglich, z.B. durch halboffene Teilintervalle.

Im eindimensionalen Fall bietet sich für μ_τ eine Überdeckung durch halboffene Intervalle der Form $E_j^{\mu_\tau} = [s_j, s_{j+1})$ an, wobei $0 = s_1 < s_2 < \dots < s_{m+1} = 1$ und das letzte Intervall auch rechtsseitig abgeschlossen wird. Für die Teilmaße $\mu_\tau^{(j)}$ wird jeweils ein auf $[0, 1]$ transformiertes Maß $\tilde{\mu}_\tau^{(j)}$ mittels

$$\tilde{\mu}_\tau^{(j)}([y_1, y_2]) := \mu_\tau^{(j)}([s_j + y_1(s_{j+1} - s_j), s_j + y_2(s_{j+1} - s_j)]) \quad \text{für } 0 \leq y_1 < y_2 \leq 1$$

definiert. Für das i -te Moment von $\tilde{\mu}_\tau^{(j)}$ gilt dann

$$\tilde{\mu}_{\tau,i}^{(j)} = (s_{j+1} - s_j)^{-i} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (-s_j)^{i-k} \mu_{\tau,k}^{(j)}, \quad (1.55)$$

wobei $\mu_{\tau,k}^{(j)}$ das k -te Moment von $\mu_\tau^{(j)}$ ist. Für das Maß μ und die Überdeckung $\{E_j^\mu\}_{j=1,2,\dots,l}$ gilt entsprechendes. Auf die Rücktransformation $R^{(\tilde{n})}(\underline{\mu})$ mit $\tilde{n} \leq \tilde{M}$ und $R^{(n)}(\underline{\mu}_\tau^{(j)})$ mit $n \leq M$ für die Werte $\underline{\mu}$ bzw. $\underline{\mu}_\tau^{(j)} := \{\mu_{\tau,i}^{(j)}\}_{i \leq M}$ treffen ebenfalls sinngemäß die Aussagen von Lemma 1.8 und Lemma 1.9 zu, wobei lediglich die veränderten Normierungen $\sum_{i=0}^{\tilde{n}} R^{(\tilde{n})}(\underline{\mu})_i = \mu_0$ bzw. $\sum_{i=0}^n R^{(n)}(\underline{\mu}_\tau^{(j)})_i = \mu_{\tau,0}^{(j)}$ zu beachten sind.

Ist nun die Ordnung M hinreichend groß, so ist zu erwarten, dass für diejenigen Maße $\mu_\tau^{(j)}$, für die $E_j^{\mu_\tau}$ disjunkt zum Träger von μ_τ ist, keine Masse zugeordnet wird, d.h. dass $\mu_{\tau,i}^{(j)} = 0$ für

$i = 0, \dots, M$ ist. Für alle anderen Werte $\mu_{\tau,i}^{(k)}$ kann wiederum die Rücktransformation vorgenommen werden, um genauere Trägerinformationen für $\mu_{\tau}^{(k)}$ zu gewinnen. Man versucht nun, dieses Verfahren sukzessive fortzuführen, bis der Träger von μ_{τ} hinreichend genau identifiziert ist. Gelingt eine solche Identifikation, so bleibt zu überprüfen, ob dann auch der Zielfunktionswert und die Momente von μ_{τ} und μ hinreichend genau berechnet werden.

1.4.3 Die Verfeinerung für das Einführungsbeispiel

Anhand des Beispiels aus Abschnitt 1.3.5 soll genauer erläutert werden, wie das vorgeschlagene Verfahren funktioniert. Dieses Beispiel dient wie die nachfolgenden auch dazu, zu überprüfen, ob die Rücktransformation verwertbare Trägerinformation für μ_{τ} liefert, ob das Verfahren konvergiert und wie genau der Zielfunktionswert sowie die Momente von μ_{τ} und μ berechnet werden.

Die folgende Tabelle 1.6 zeigt jeweils die Rücktransformation der höchstmöglichen Ordnung $R^{(20)}(\underline{\mu}_{\tau})$ und $R^{(18)}(\underline{\mu})$ auf die numerischen Werte $\underline{\mu}_{\tau} = \{\mu_i^{\tau}\}_{i \leq 20}$ und $\underline{\mu} = \{\mu_i\}_{i \leq 18}$ aus Tabelle 1.5 von S. 34.

i	$\frac{i}{20}$	$R^{(20)}(\underline{\mu}_{\tau})_i$	$\frac{i}{18}$	$R^{(18)}(\underline{\mu})_i$
0	0.0	0.341315	0.0	0.00179219
1	0.05	0.0	0.0555556	0.00354839
2	0.1	0.0	0.111111	0.00515803
3	0.15	0.0	0.166667	0.00639081
4	0.2	0.0	0.222222	0.00693717
5	0.25	0.0	0.277778	0.00654213
6	0.3	0.0	0.333333	0.00513848
7	0.35	0.0	0.388889	0.00287028
8	0.4	0.0	0.444444	0.0
9	0.45	0.600208	0.5	$-5.53418 \cdot 10^{-5}$
10	0.5	0.0571411	0.555556	$2.7864 \cdot 10^{-5}$
11	0.55	0.0	0.611111	$4.7877 \cdot 10^{-5}$
12	0.6	0.0	0.666667	$4.75779 \cdot 10^{-5}$
13	0.65	0.0	0.722222	$4.19218 \cdot 10^{-5}$
14	0.7	0.0	0.777778	$3.51178 \cdot 10^{-5}$
15	0.75	0.0	0.833333	$2.8117 \cdot 10^{-5}$
16	0.8	0.0	0.888889	$2.10898 \cdot 10^{-5}$
17	0.85	0.0	0.944444	$1.406 \cdot 10^{-5}$
18	0.9	0.0	1.0	$7.03002 \cdot 10^{-6}$
19	0.95	0.0		
20	1.0	0.0013357		

Tabelle 1.6: Rücktransformation der numerischen Werte für die Momente von μ_{τ} und μ bis zur Ordnung 20 bzw. 18 für den Startwert $x_0 = 0.3$

Die Rücktransformation $R^{(20)}(\underline{\mu}_{\tau})$ besitzt nur 4 positive Komponenten, und zwar für $i = 0, 9, 10, 20$. Mit Ausnahme der geringen Masse, die bei $i = 20$ zugeordnet wird, liegen die zugehörigen Werte von $\frac{i}{20}$ dicht beim Träger $\{0, 0.4405\}$ von μ_{τ} . Der Vektor der Rücktransformation $R^{(18)}(\underline{\mu})$ ist in Abbildung 1.2 dargestellt und gibt den Träger von μ , das Intervall

$[0, 0.4405]$, relativ sauber wieder. Allerdings wird die Gestalt der Dreiecksverteilung mit Spitze bei $x_0 = 0.3$ nicht sonderlich gut widergespiegelt.

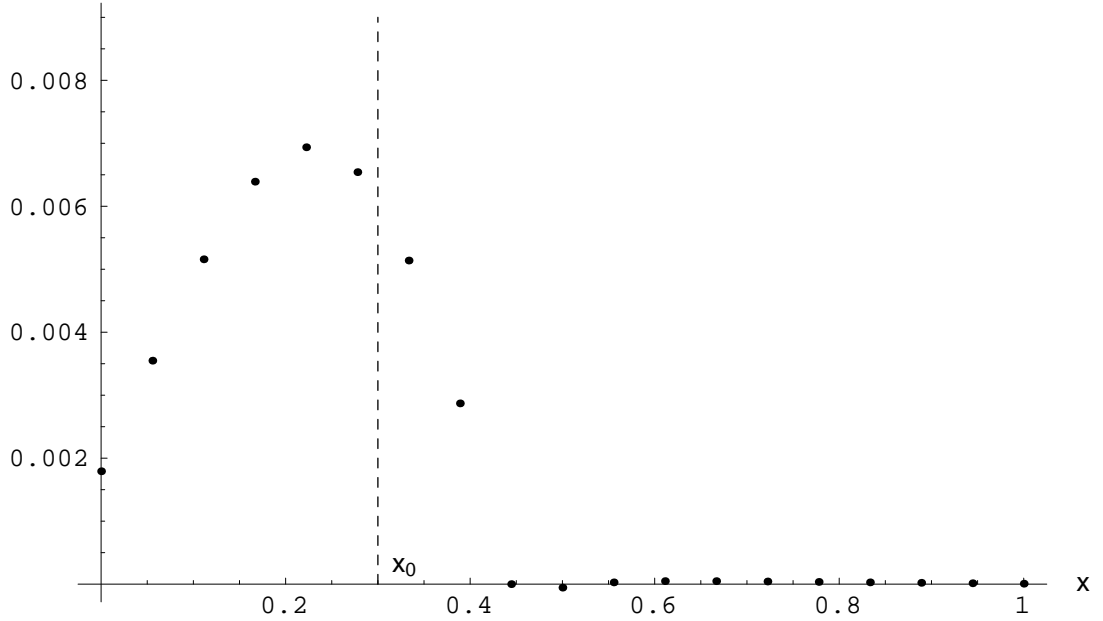


Abbildung 1.2: Resultat der Rücktransformation für die numerischen Werte der Momente des Aufenthaltsmaßes μ bei $M = 20$

Der auftretende negative Wert für $i = 9$ erklärt sich, da bei der Rücktransformation die linke Seite der Nebenbedingung $(-1)^{18-9} \Delta^9 \mu_9 \geq 0$ mit $\binom{18}{9} = 48620$ multipliziert wird. Die vorgenommene Verkleinerung des CPLEX-Parameters `feasibility` auf 10^{-8} (der kleinstmögliche Wert ist 10^{-9}) verhindert also nicht in jedem Fall solche kleinen negativen Werte.

Für das Aufenthaltsmaß μ soll keine Unterteilung von E vorgenommen werden. Bei μ_τ bieten sich z.B. die jeweiligen Nachbarpunkte der obigen Punkte, denen durch die Rücktransformation ein positiver Wert zugeordnet wird, als Teilungspunkte für das Intervall $E = [0, 1]$ an. Hier sind das die Werte $s_1 = 0$, $s_2 = 0.05$, $s_3 = 0.4$, $s_4 = 0.55$, $s_5 = 0.95$ und $s_6 = 1$. Es können auch andere Teilintervalle um die Punkte mit positiver Masse herum gewählt werden. Sie sollten jedoch nicht zu klein im Verhältnis zu $\frac{1}{n}$ sein, da ansonsten der Fall eintreten kann, dass sie disjunkt zum Träger von μ_τ sind.

Insgesamt kann für die 5 Teilmaße $\mu_\tau^{(1)}, \dots, \mu_\tau^{(5)}$ folgendes lineares Programm (1.56) aufgestellt werden

$$\max \sum_{j=1}^5 \left(\mu_{\tau,0}^{(j)} - 9 \mu_{\tau,1}^{(j)} + 59 \mu_{\tau,2}^{(j)} - 100 \mu_{\tau,3}^{(j)} + 50 \mu_{\tau,4}^{(j)} \right)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^5 \mu_{\tau,i}^{(j)} - \frac{1}{2} i(i-1) \mu_{i-2} = x_0^i \quad \text{für } 2 \leq i \leq M,$$

$$\sum_{j=1}^5 \mu_{\tau,1}^{(j)} = x_0, \quad \sum_{j=1}^5 \mu_{\tau,0}^{(j)} = 1,$$

$$\tilde{\mu}_{\tau,i}^{(j)} = (s_{j+1} - s_j)^{-i} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (-s_j)^{i-k} \mu_{\tau,k}^{(j)} \quad \text{für } 1 \leq j \leq 5, \quad 0 \leq i \leq M,$$

$$\Delta^{m+1} \tilde{\mu}_{\tau,i}^{(j)} = \Delta^m \tilde{\mu}_{\tau,i+1}^{(j)} - \Delta^m \tilde{\mu}_{\tau,i}^{(j)} \quad \text{für } 1 \leq j \leq 5, \quad 0 \leq m \leq M-1, \quad 0 \leq i \leq M-1-m,$$

$$\Delta^{m+1} \mu_i = \Delta^m \mu_{i+1} - \Delta^m \mu_i \quad \text{für } 0 \leq m \leq M-3, \quad 0 \leq i \leq M-3-m,$$

$$(-1)^m \Delta^m \tilde{\mu}_{\tau,i}^{(j)} \geq 0 \quad \text{für } 1 \leq j \leq 5, \quad 0 \leq m \leq M, \quad 0 \leq i \leq M-m,$$

$$(-1)^m \Delta^m \mu_i \geq 0 \quad \text{für } 0 \leq m \leq M-2, \quad 0 \leq i \leq M-2-m.$$

Es ist erkennbar, dass dieses lineare Programm klar strukturiert ist und sich eine Formulierung mit einer Modellierungssprache sehr anbietet. Zur Verdeutlichung hierfür ist im Anhang A das AMPL-Modellfile zusammen mit dem Datenfile angegeben.

In der nachfolgenden Tabelle 1.7 ist für verschiedene Werte M die Zahl der Variablen und Nebenbedingungen des linearen Programmes (1.56) angegeben. Im Gegensatz zur relativ übersichtlichen Formulierung im Modellfile, können die resultierenden linearen Programme sehr groß werden (vgl. auch Tabelle 1.9). Die letzte Spalte von Tabelle 1.7 beinhaltet die Konditionszahl der Matrix die durch die Nebenbedingungen gebildet wird und weiterhin mit B bezeichnet sei.

M	Variablen	Nebenbedingungen	Konditionszahl
10	430	752	$8.92103 \cdot 10^{15}$
11	505	892	$2.68911 \cdot 10^{17}$
12	586	1044	$9.13059 \cdot 10^{18}$
13	673	1208	$3.52254 \cdot 10^{20}$
14	766	1384	$1.35165 \cdot 10^{22}$
15	865	1572	$5.23911 \cdot 10^{23}$
20	1450	2692	$4.24319 \cdot 10^{31}$
30	3070	5832	$2.81120 \cdot 10^{47}$

Tabelle 1.7: Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen sowie die Konditionszahl für verschiedene Ordnungen M im verfeinerten linearen Programm

Tabelle 1.8 zeigt nun für die selben Werte M die optimalen Zielfunktionswerte. In den anschließenden Spalten sind die Momente $\mu_{\tau,0}^{(j)}$ aufgeführt, d.h. die Massenanteile, die für das Maß μ_τ den einzelnen Teilintervallen zugeordnet werden.

Für die Zielfunktionswerte ist eine deutliche Verbesserung gegenüber den Werten aus Tabelle 1.2 ohne Verfeinerung zu erkennen. Mit zunehmender Ordnung M ist hier wiederum eine Verbesserung des Zielfunktionswertes erkennbar. Für die Massenverteilung auf $\mu_\tau^{(1)}$ und $\mu_\tau^{(3)}$ ist keine

M	Zielfunktionswert	$\mu_{\tau,0}^{(1)}$	$\mu_{\tau,0}^{(2)}$	$\mu_{\tau,0}^{(3)}$	$\mu_{\tau,0}^{(4)}$	$\mu_{\tau,0}^{(5)}$
10	1.5629	0.3258	0	0.6742	0	0
11	1.5623	0.3196	0	0.6804	0	0
12	1.5615	0.3143	0	0.6857	0	0
13	1.5615	0.3276	0	0.6724	0	0
14	1.5613	0.3226	0	0.6774	0	0
15	1.5609	0.3182	0	0.6818	0	0
20	1.5602(u.i.)	0.3258	0	0.6742	0	0
30	1.5593(u.i.)	0.3182	0	0.6818	0	0

Tabelle 1.8: Zielfunktionswert und die Verteilung der Masse auf die Teilmaße $\mu_{\tau}^{(j)}$ für verschiedene Ordnungen M im verfeinerten linearen Programm

eindeutige Tendenz auszumachen. Die korrekten Werte sind $p = 9(20 - \sqrt{46})^{-1} \approx 0.6809$ für $\mu_{\tau}^{(3)}$ und $1 - p \approx 0.3191$ für $\mu_{\tau}^{(1)}$ (vgl. (1.46) und (1.47)) sowie 1.5578 für den Zielfunktionswert. Für $M = 20$ erhält man die Lösung mit der Warnung **unscaled infeasibilities**. Als Ursachen kommen der größere Umfang des linearen Programms (1.56) und die wesentlich größeren Konditionszahlen gegenüber dem ursprünglichen linearen Programm in Frage. Aus diesem Grund wird bei der Verfeinerung die Ordnung M auf 15 herabgesetzt.

Wendet man die Rücktransformation $R^{(15)}$ auf $\tilde{\mu}_{\tau}^{(1)} = \{\tilde{\mu}_{\tau,i}^{(1)}\}_{i \leq 15}$ an, so erhält man die volle Masse 0.3182 für $i = 0$, alle anderen Komponenten sind 0. Für $\tilde{\mu}_{\tau}^{(3)}$ wird die volle Masse von 0.6818 bei $i = 4$ zugeordnet. Das entspricht zurückgerechnet auf die untransformierten Maße $\mu_{\tau}^{(j)}$ den Punkten 0 und $0.4 + \frac{3}{20} \frac{4}{15} = 0.44$.

Als neue Randpunkte werden $s_1 = 0$, $s_2 = 0.004$, $s_3 = 0.43$, $s_4 = 0.45$ und $s_5 = 1$ gewählt. Das letzte Intervall $E_5^{\mu_{\tau}}$ aus der 2. Iteration entfällt. Die Intervalle $E_1^{\mu_{\tau}}$ und $E_3^{\mu_{\tau}}$ sind damit deutlich kleiner als in der 2. Iteration. Die Lösung des neuen linearen Programmes zeigt jedoch, dass die volle Masse von μ_{τ} in diesen beiden Intervallen verbleibt (vgl. Tabelle 1.10).

Auf diesem Weg werden die Intervalle, in denen die Masse verteilt ist, sukzessive verkleinert. In den Tabellen 1.9 und 1.10 sind die weiteren Iterationen zusammengefasst. Tabelle 1.9 zeigt für jede Iteration die Ordnung M , die Zahl der Variablen und Nebenbedingungen sowie die Konditionszahl der Matrix B . In der anschliessenden Tabelle 1.10 sind der Zielfunktionswert (ZFW), die Massen $\mu_{\tau,0}^{(j)}$ in den Teilintervallen und die mittleren Teilungspunkte s_2 , s_3 und s_4 angegeben. Die Rücktransformation $R^{(15)}$ liefert in allen Iterationen für $\mu_{\tau}^{(1)}$ und $\mu_{\tau}^{(3)}$ nur für genau eine Komponente i einen positiven Wert. Diese Komponente ist in der Spalte hinter $\mu_{\tau,0}^{(1)}$ bzw. $\mu_{\tau,0}^{(3)}$ angegeben.

Versucht man, die Intervalle, denen die Masse zugeordnet wird, noch weiter zu verkleinern, so beobachtet man numerische Instabilitäten, insbesondere bei der Rücktransformation. Die Zielfunktionswerte ändern sich nicht gegenüber den vorherigen Iterationen, jedoch lässt sich aus der Rücktransformation keine klare neue Unterteilung mehr ableiten. Je nach Vorinformation über die Basis (es wurde die Standardeinstellung 1 für den CPLEX-Parameter **advance** verwendet) variieren auch die Punkte, denen durch die Rücktransformation positive Masse zugeordnet wird.

Eine wesentliche Ursache für dieses Verhalten ist darin zu sehen, dass das lineare Programm

Iteration	M	Variablen	Nebenbedingungen	Konditionszahl
3	15	1300	713	$1.78631 \cdot 10^{36}$
4	15	1300	713	$3.46952 \cdot 10^{40}$
5	15	1300	713	inf

Tabelle 1.9: Die Ordnung M , die Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen sowie die Konditionszahl der Matrix B

Iteration	ZFW	$\mu_{\tau,0}^{(1)}$	i	s_2	$\mu_{\tau,0}^{(2)}$	s_3	$\mu_{\tau,0}^{(3)}$	i	s_4	$\mu_{\tau,0}^{(4)}$
3	1.5578	0.3192	0	0.004	0	0.43	0.6808	8	0.45	0
4	1.5578	0.3191	0	0.0003	0	0.4393	0.6809	7	0.4421	0
5	1.5578	0.3191	0	0.0001	0	0.4404	0.6809	7	0.4408	0

Tabelle 1.10: Zusammenfassung der weiteren Iterationen

(1.56) bei sehr kleinen Teilintervallen zu einer sehr schlecht konditionierten Matrix B führt (vgl. Tabelle 1.9). Zurückzuführen ist das im Wesentlichen auf die Gleichungsnebenbedingungen (1.55), die für kleine Differenzen $s_{j+1} - s_j$ sehr große Koeffizienten enthalten.

Es zeigt sich jedoch, dass die Resultate, die man nach der 5. Iteration erhält, bereits sehr genau mit den korrekten Werten übereinstimmen. Auch haben sich in den Iterationen 3 bis 5 der Zielfunktionswert und die Massenverteilung auf $\mu_{\tau,0}^{(1)}$ und $\mu_{\tau,0}^{(3)}$ kaum noch verändert. Nach der 5. Iteration erhält man mit der Rücktransformation zwei Werte bei denen Masse von μ_τ liegt. Der kleinere ist 0, der größere ist 0.440586. Dieser Wert liegt sehr nahe am korrekten Wert 0.440589. Die Wahrscheinlichkeiten $1 - p$ und p für das Erreichen des linken bzw. rechten Randes des Fortsetzungsbereiches sowie der Zielfunktionswert werden sehr genau bestimmt. Auch bei den Momenten erhält man eine gute Übereinstimmung wie die nachfolgende Tabelle 1.11 zeigt.

Auch für weitere Startpunkte erzielt man ähnlich genaue Ergebnisse. Abbildung 1.3 zeigt die Zielfunktionswerte für die gleichen Startpunkte x_0 wie in Abbildung 1.1. Es ist keine Abweichung von der Funktion v_1 zu erkennen. Für die Startwerte 0.01, 0.02, ..., 0.44 und 0.56, 0.57, ..., 0.99 wird der Rand des lokalen Fortsetzungsbereiches F_{x_0} korrekt identifiziert. Bei den Startwerten $x_0 = 0.45, 0.46, \dots, 0.55$ erhält man die volle Masse von μ_τ bei x_0 und damit die Information, dass $x_0 \in S$ ist.

Diese Beispiel zeigt, dass die Information, die die Rücktransformation liefert, zu einer korrekten Identifizierung des Trägers von μ_τ führt und dass alle interessierenden Größen bei einer zunehmenden Verfeinerung genauer bestimmt werden.

Bemerkung: Die nachfolgende Abbildung 1.4 zeigt die Werte, die die Rücktransformation $R^{(20)}$ angewandt auf die exakten ersten 20 Momente des Maßes μ_τ zum Stoppzeitpunkt τ liefert (vgl. Tabelle 1.11).

Man erkennt deutlich, dass damit kaum eine Identifizierung des Trägers von μ_τ , insbesondere von x_1 , möglich ist. Bei den Momenten handelt es sich hier um eine Folge aus dem Momentenraum \mathcal{M}_{20} der Ordnung 20. Alle Komponenten der Rücktransformation sind positiv, d.h. die Folge der ersten 20 Momente von μ_τ liegt im Inneren des Hausdorffpolytops \mathcal{H}_{20} . Bei der

i	$\mu_{\tau,i}^{(1)}$	$\mu_{\tau,i}^{(2)}$	$\mu_{\tau,i}^{(3)}$	$\mu_{\tau,i}^{(4)}$	μ_i^{τ} (exakt)	μ_i (numerisch)	μ_i (exakt)
0	0.31909	0	0.68091	0	1	0.042176	0.0421767
1	0	0	0.3	0	0.3	0.0104117	0.0104119
2	0	0	0.132176	0	0.132177	0.00292626	0.00292633
3	0	0	0.058235	0	0.0582356	0.000887438	0.000887462
4	0	0	0.0256576	0	0.025658	0.000283437	0.000283446
5	0	0	0.0113044	0	0.0113046	$9.40794 \cdot 10^{-5}$	$9.40827 \cdot 10^{-5}$
6	0	0	0.00498056	0	0.00498069	$3.21857 \cdot 10^{-5}$	$3.2187 \cdot 10^{-5}$
7	0	0	0.00219437	0	0.00219444	$1.12856 \cdot 10^{-5}$	$1.12861 \cdot 10^{-5}$
8	0	0	0.000966809	0	0.000966845	$4.0393 \cdot 10^{-6}$	$4.03951 \cdot 10^{-6}$
9	0	0	0.000425963	0	0.000425981	$1.47118 \cdot 10^{-6}$	$1.47126 \cdot 10^{-6}$
10	0	0	0.000187674	0	0.000187683	$5.43926 \cdot 10^{-7}$	$5.43959 \cdot 10^{-7}$
11	0	0	$8.26865 \cdot 10^{-5}$	0	$8.26909 \cdot 10^{-5}$	$2.03736 \cdot 10^{-7}$	$2.03749 \cdot 10^{-7}$
12	0	0	$3.64305 \cdot 10^{-5}$	0	$3.64327 \cdot 10^{-5}$	$7.71862 \cdot 10^{-8}$	$7.71916 \cdot 10^{-8}$
13	0	0	$1.60508 \cdot 10^{-5}$	0	$1.60518 \cdot 10^{-5}$	$2.95369 \cdot 10^{-8}$	$2.95392 \cdot 10^{-8}$
14	0	0	$7.07177 \cdot 10^{-6}$	0	$7.07227 \cdot 10^{-6}$		
15	0	0	$3.11573 \cdot 10^{-6}$	0	$3.11596 \cdot 10^{-6}$		

Tabelle 1.11: Numerische Resultate nach der 5. Iteration für die Momente von $\mu_{\tau}^{(j)}$ und μ sowie die exakten Momente von μ_{τ} und μ

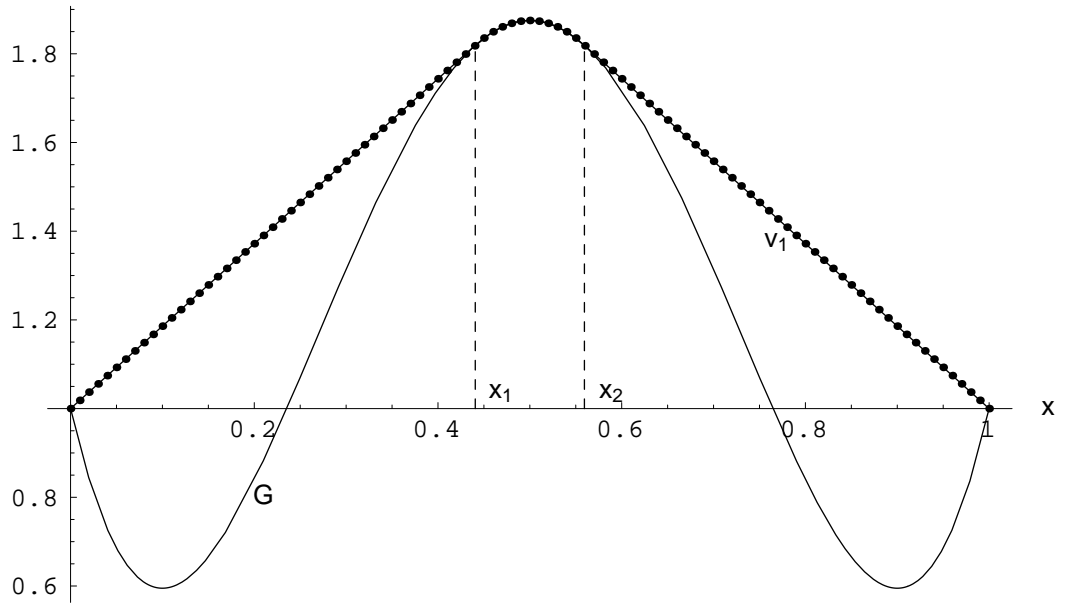


Abbildung 1.3: Numerische Resultate für die Zielfunktionswerte nach der 5. Iteration im verfeinerten linearen Programm bei maximaler Ordnung $M = 15$

Anwendung der Rücktransformation auf die Ergebnisse der linearen Programme wird also die Tatsache ausgenutzt, dass es sich dabei im Allgemeinen um Folgen handelt, die auf dem Rand des jeweiligen Hausdorffpolytops liegen (z.B. auf zwei- oder dreidimensionalen Kanten) und die nicht Elemente des zugehörigen Momentenraumes sind.

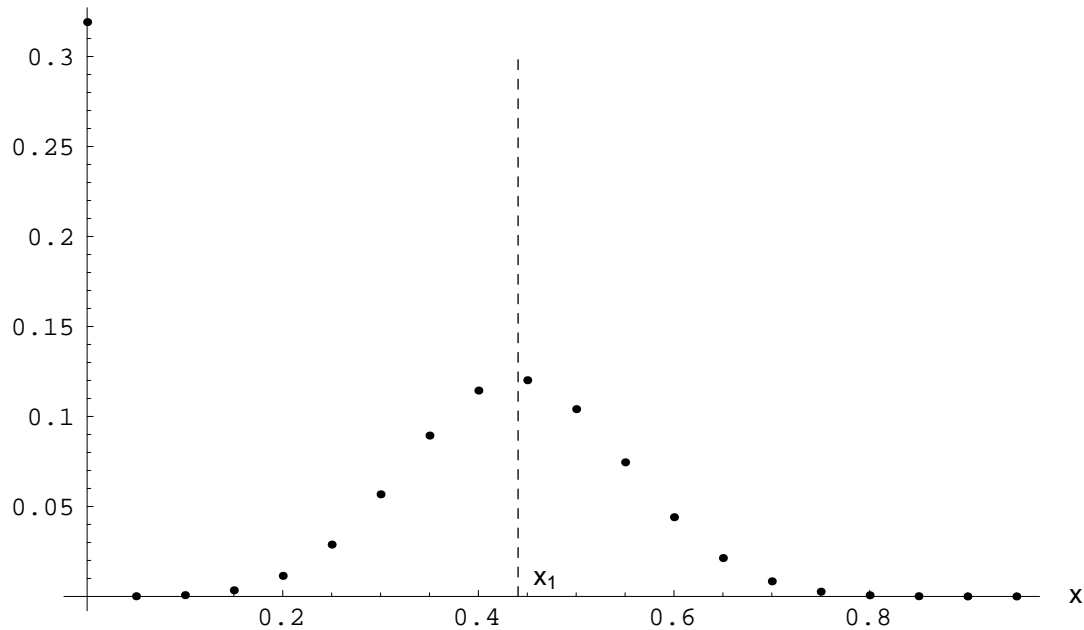


Abbildung 1.4: Numerische Resultate der Rücktransformation $R^{(20)}$ angewandt auf die exakten ersten 20 Momente von μ_τ

1.5 Die Berücksichtigung von Verlaufsgewinnen

Es soll nun das Eingangsbeispiel modifiziert werden, indem verschiedene Funktionen Q für Verlaufsgewinne betrachtet werden. Dabei steht die Frage im Vordergrund, ob mit der oben vorgeschlagenen Methode die jeweiligen optimalen Stoppbereiche identifiziert werden können. Die Zielgewinnfunktion G bleibt zunächst unverändert.

Unter den Voraussetzungen (1.1) und (1.15) können im eindimensionalen Fall für einen Startwert $x_0 \in [0, 1]$ nur die folgenden Fälle (1.57) auftreten:

1. Der lokale Fortsetzungsbereich F_{x_0} ist ein Intervall der Form $(0, x_1)$ mit $0 < x_0 < x_1 < 1$.
2. Der lokale Fortsetzungsbereich F_{x_0} ist ein Intervall der Form $(x_2, 1)$ mit $0 < x_2 < x_0 < 1$.
3. Der lokale Fortsetzungsbereich F_{x_0} ist leer, d.h. es wird in x_0 gestoppt.
4. Der lokale Fortsetzungsbereich F_{x_0} ist das Intervall $(0, 1)$.
5. Der lokale Fortsetzungsbereich F_{x_0} ist ein Intervall (x_1, x_2) mit $0 < x_1 < x_0 < x_2 < 1$.

1.5.1 Konstante Verlaufsgewinne

Analysiert man für die Zielgewinnfunktion $G(x) = 1 - 9x + 59x^2 - 100x^3 + 50x^4$ und den Startwert $x_0 = 0.3$ sowie konstanten Verlaufsgewinn q das zugehörige Variationsproblem ⁴ (vgl.

⁴Dort wo sich die Variationsprobleme nicht mehr einfach mit der Hand lösen ließen, wurde die Hilfe von Mathematica 4.0 in Anspruch genommen.

[43] Theorem 10.18), so erhält man die folgenden Aussagen:

1. Die Wertefunktion v_1 ist außerhalb des Stoppbereiches eine quadratische Funktion.
2. Der Fall 5 in (1.57) tritt für kein $q \in \mathbb{R}$ ein. Auch für alle anderen Startwerte $x_0 \in (0, 1)$ scheidet er aus. Dieser Fall ist jedoch für andere Funktionen G und Q sowie andere Prozesse \mathfrak{X} möglich (vgl. die beiden Beispiele am Ende dieses Abschnittes).
3. Für $q > 3.5$ wird nur am Rand von E gestoppt, d.h. es tritt der Fall 4 in (1.57) ein.
4. Für $-12.5 < q < 3.5$ tritt Fall 1 in (1.57) ein.
5. Für $q \leq -12.5$ ist es optimal, sofort zu stoppen (Fall 3 in (1.57)).

Für $q = 3.5$ berührt die Funktion v_1 die Zielgewinnfunktion G im Punkt 0.5 von oben (vgl. Abbildung 1.5). In diesem Fall besteht Indifferenz, ob in 0 und $x_1 = 0.5$ oder in 0 und 1 gestoppt wird. Sowohl der Stoppbereich $S = \{0, 0.5, 1\}$ als auch der Stoppbereich $S = \{0, 1\}$ realisieren die optimale Gewinnfunktion v_1 . Der lokale Fortsetzungsbereich F_{x_0} ist hier das Intervall $(0, 0.5)$, für das Aufenthaltsmaß μ sind aber sowohl das Intervall $(0, 0.5)$ als auch das Intervall $(0, 1)$ als Träger möglich (vgl. auch den letzten Absatz in Abschnitt 1.3.1).

Im Fall $q = -12.5$ berühren sich die Funktionen G und v_1 genau am Startpunkt $x_0 = 0.3$. Für beide Fälle ist in Abbildung 1.5 die optimale Gewinnfunktion v_1 dargestellt.

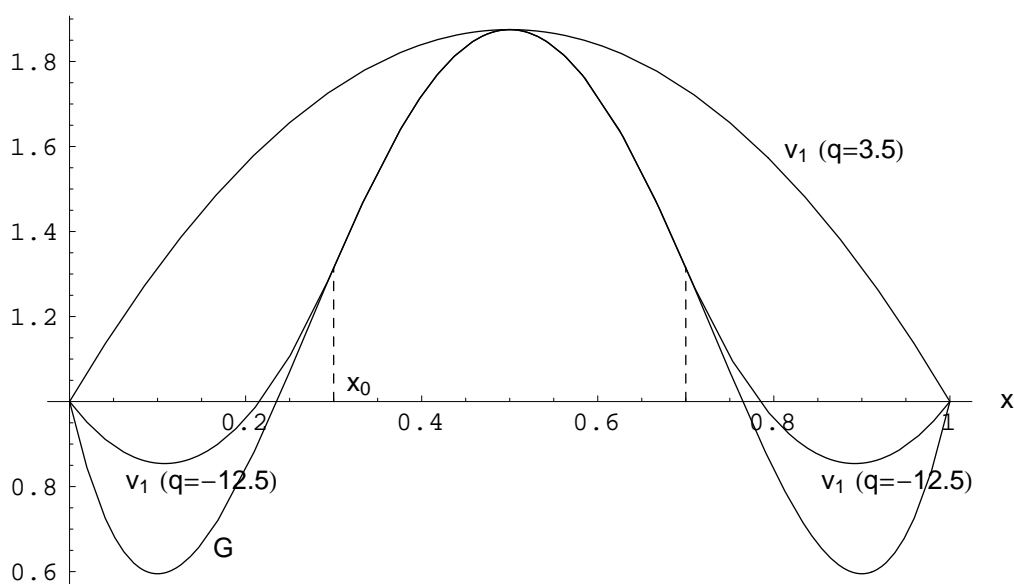


Abbildung 1.5: Die Zielgewinnfunktion G und optimalen Gewinnfunktionen v_1 für die Grenzfälle $q = 3.5$ und $q = -12.5$

Während die optimale Gewinnfunktion v_1 bei festem Startwert x_0 in Abhängigkeit von q stetig ist, zeigen die lokalen Fortsetzungsbereiche $F_{x_0}^{(q)}$ für $q = 3.5$ und $q = -12.5$ ein unstetiges Verhalten. Für $q > 3.5$ ist $F_{x_0}^{(q)} = (0, 1)$, für $-12.5 < q < 3.5$ ist $F_{x_0}^{(q)} = (0, x_1^{(q)})$, wobei $0.3 < x_1^{(q)} < 0.5$ sowie $x_1^{(q)} \uparrow 0.5$ für $q \uparrow 3.5$ und $x_1^{(q)} \downarrow 0.3$ für $q \downarrow -12.5$ gilt. Für $q \leq -12.5$ ist dann $F_{x_0}^{(q)} = \emptyset$.

Da der vorgeschlagene Verfeinerungsalgorithmus die Identifizierung des lokalen Fortsetzungsbereiches F_{x_0} beinhaltet, soll bei den nachfolgenden Untersuchungen in diesem Abschnitt insbesondere das Verhalten an diesen beiden Unstetigkeitsstellen des lokalen Fortsetzungsbereiches untersucht werden.

Bei der Berücksichtigung von konstanten Verlaufsgewinnen verändern sich lediglich die Zielfunktionen der linearen Programme (1.39) und (1.56). Im linearen Programm (1.39) erhält man

$$\max \mu_0^\tau - 9 \mu_1^\tau + 59 \mu_2^\tau - 100 \mu_3^\tau + 50 \mu_4^\tau + q \mu_0 \quad (1.58)$$

als neue Zielfunktion, im verfeinerten linearen Programm (1.56) ergibt sich

$$\max \sum_{j=1}^5 \left(\mu_{\tau,0}^{(j)} - 9 \mu_{\tau,1}^{(j)} + 59 \mu_{\tau,2}^{(j)} - 100 \mu_{\tau,3}^{(j)} + 50 \mu_{\tau,4}^{(j)} \right) + q \mu_0. \quad (1.59)$$

Auch hier erreicht das lineare Programm ohne Unterteilung von E nur relativ schlechte Resultate. Das betrifft sowohl die Zielfunktionswerte als auch die berechneten Momente von μ und μ_τ . Die Rücktransformation liefert für einige Werte von q sogar zunächst überraschend schlechte Werte (vgl. Tabellen 1.13, 1.17 und 1.19).

Für $q > 3.5$ wird der Prozess \mathfrak{X} nicht im Inneren von E gestoppt und erreicht mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.3$ in 1 den Rand von E und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p = 0.7$ in 0 den Rand von E . Allerdings werden bei der Ordnung $M = 20$ erst für $q \geq 4.2353$ mit der Rücktransformation $R^{(20)}(\underline{\mu}_\tau)_{20} = 0.3$ und $R^{(20)}(\underline{\mu}_\tau)_0 = 0.7$ berechnet. Für $3.5 \leq q \leq 4.2353$ erhält man ein ähnliches Resultat wie im ersten Schritt bei der Rechnung ohne Verlaufsgewinne. Es wird durch die Rücktransformation $R^{(20)}$ der Hauptanteil der Masse von μ_τ bei 0 und 0.5 zugeordnet. Nur ein relativ kleiner Anteil wird auf 1 abgebildet (vgl. die 1. Iteration in den Tabellen 1.12 und 1.13). Dieses Verhalten beobachtet man auch für Werte $q \leq 3.5$ (vgl. die 1. Iteration in den Tabellen 1.14 und 1.15). Demnach kann der Umschaltpunkt $q = 3.5$ nicht aus den Lösungen des linearen Programmes (1.39) korrekt bestimmt werden.

Dasselbe gilt für den zweiten Umschaltpunkt $q = -12.5$, wo sowohl für $q > -12.5$ als auch für $q \leq -12.5$ durch die Rücktransformation $R^{(20)}$ Masse auf 0 und auf mehrere Werte um 0.3 herum verteilt wird (vgl. die 1. Iteration in den Tabellen 1.16 bis 1.19).

Bei anderen Ordnungen M ergibt sich ein ähnliches Bild.

Für folgende Werte von q sollen nachfolgend die Ergebnisse zusammengefasst werden:

1. $q = 3.51$ (Beispiel für Fall 4 in (1.57)),
2. $q = 3.49$ (Beispiel für Fall 1 in (1.57)),
3. $q = -12.49$ (Beispiel für Fall 1 in (1.57)) und
4. $q = -12.51$ (Beispiel für Fall 3 in (1.57)).

Der Startwert ist dabei stets $x_0 = 0.3$.

Die Tabellen 1.12 bis 1.19 sind dabei ähnlich wie Tabelle 1.10 aufgebaut. Zu jedem Beispiel gehören zwei Tabellen. In der ersten Tabelle sind die Ordnung M , der Zielfunktionswert und die jeweiligen Randpunkte s_j der Teilintervalle angegeben, in der zweiten Tabelle stehen die Massenanteile, die auf die einzelnen Teilintervalle verteilt werden und für diejenigen Teilintervalle, für die $\mu_{\tau,0}^{(j)}$ positiv ist, werden in der nachfolgenden Spalte die Indizes i angegeben, denen bei der Rücktransformation positive Werte zugeordnet werden.

1. $q = 3.51$:

Die Ergebnisse sind in den Tabellen 1.12 und 1.13 zusammengefasst.

Iteration	M	ZFW	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
1	20	1.8512	0.0	1.0				
2	20	1.7371	0.0	0.05	0.45	0.55	0.95	1.0
3	20	1.8503	0.0	0.0025	0.9975	1.0		
4	20	1.7371	0.0	0.0025	0.45	0.55	0.9975	1.0
5	20	1.7371	0.0	0.000125	0.45	0.55	0.999875	1.0

Tabelle 1.12: Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen für $q = 3.51$

Iteration	M	$\mu_{\tau,0}^{(1)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(2)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(3)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(4)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(5)}$	i
1	20	1.0	0, 10, 20								
2	20	0.7	0	0		0		0		0.3	20
3	20	0.40002	0	0.59996	10	$2.0757 \cdot 10^{-5}$	20				
4	20	0.7	0	0		0		0		0.3	20
5	20	0.7	0	0		0		0		0.3	20

Tabelle 1.13: Massenverteilung und Rücktransformation der Iterationen für $q = 3.51$

In der ersten Iteration ist $R^{(20)}(\underline{\mu}_{\tau})_0 = 0.400973$, $R^{(20)}(\underline{\mu}_{\tau})_{10} = 0.598053$ und $R^{(20)}(\underline{\mu}_{\tau})_{20} = 0.00097338$. Diese Verteilung der Masse spiegelt nicht den Träger von μ_{τ} wieder. Schon im zweiten Schritt ändert sich diese Zuordnung auch grundlegend. Diesmal wird die Masse in der richtigen Höhe an die richtigen Punkte gelegt und auch der Zielfunktionswert entspricht der exakten Lösung $v_1(0.3) = -3.51 \cdot (0.3)^2 + 3.51 \cdot 0.3 + 1 = 1.7371$. Versucht man nun im folgenden 3. Schritt an den Randpunkten von E den Träger von μ_{τ} weiter einzuschränken und lässt gleichzeitig das mittlere Intervall $[0.45, 0.55)$ weg, so verrutscht die Massenzuordnung wiederum völlig. Gleichzeitig erhöht sich der Zielfunktionswert erheblich, was deutlich macht, dass die vorliegende Massenverteilung nicht korrekt ist. Da nun wiederum ein deutlicher Masseanteil (und zwar 0.59996) an den Punkt $x = 0.5$ gesetzt wird, werden in der 4. Iteration wieder die Teilungspunkte $s_3 = 0.45$ und $s_4 = 0.55$ hinzugenommen. Es wird weiter bei 0 und 1 verfeinert und im Ergebnis die Masse wieder korrekt verteilt. Jeder Versuch erneut die Teilungspunkte s_3 und s_4 wegzulassen, führt zu einem ähnlichen Resultat wie im 3. Schritt. Nach dem 5. Schritt hat man dann den Träger von μ_{τ} mit einer Genauigkeit von 10^{-5} identifiziert und auch den exakten Wert $v_1(0.3)$ mit der Zielfunktion des linearen Programmes erhalten.

Man erkennt, dass die Identifizierung des Trägers von μ_{τ} nicht in jedem Fall so geradlinig wie beim Einführungsbeispiel ohne Verlaufsgewinne funktioniert. In Bereichen, wo die Lösung

des Stoppproblemes bezüglich des lokalen Fortsetzungsbereiches instabil ist, zeigen sich diese Instabilitäten auch in der Verfeinerung des linearen Programmierungsansatzes. Das macht sich insbesondere im oben beschriebenen Verrutschen der Massenzuordnung bemerkbar. Hier ist man dann gezwungen, mehr Unterteilungen vorzunehmen, als zur eigentlichen Eingrenzung der Randpunkte des lokalen Fortsetzungsbereiches notwendig wären. Dort wo die Funktionen v_1 und G sehr nahe aneinander liegen ohne sich zu berühren, befinden sich solche kritischen Bereiche, die eine weitere Unterteilung erfordern. Bei der fortlaufenden Verfeinerung kann man diese Bereiche allerdings erkennen und erhält bei ihrer Berücksichtigung wiederum eine genaue Identifizierung des Trägers von μ_τ und den Wert $v_1(x_0)$ in der Zielfunktion.

Auch für Werte von q noch dichter bei 3.5 funktioniert der verfeinerte lineare Programmierungsansatz. Dabei springt die Masse vom Punkt $x = 0.5$ allerdings erst nach weiteren Verfeinerungen um 0.5 herum an den Endpunkt des Intervalls E .

2. $q = 3.49$:

Die Ergebnisse sind in den Tabellen 1.14 und 1.15 zusammengefasst.

Iteration	M	ZFW	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
1	20	1.8502	0.0	1.0				
2	20	1.7354	0.0	0.05	0.45	0.55	0.95	1.0
3	20	1.7344	0.0	0.0025	0.495	0.505	1.0	
4	20	1.7344	0.0	0.000125	0.49975	0.50025	1.0	

Tabelle 1.14: Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen für $q = 3.49$

Iteration	M	ZFW	$\mu_{\tau,0}^{(1)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(2)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(3)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(4)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(5)}$	i
1	20	1.8502	1.0	0, 10, 20								
2	20	1.7354	0.4	0	0		0.6	10	0		0	
3	20	1.7344	0.4	0	0		0.6	10	0			
4	20	1.7344	0.39979	0	0		0.60021	3	0			

Tabelle 1.15: Massenverteilung und Rücktransformation der Iterationen für $q = 3.49$

In der ersten Iteration ist $R^{(20)}(\underline{\mu}_\tau)_0 = 0.400973$, $R^{(20)}(\underline{\mu}_\tau)_{10} = 0.598053$ und $R^{(20)}(\underline{\mu}_\tau)_{20} = 0.00097338$. Man erhält einen geringfügig kleineren Zielfunktionswert als im Fall $q = 3.51$ aber es wird genau die gleiche Massenverteilung wie dort berechnet. Das liegt daran, dass die ermittelten Momente für μ_τ und μ im ersten Schritt bei beiden Fällen übereinstimmen. Die Verfeinerung in den nachfolgenden Schritten führt dann zu einer Identifizierung des lokalen Fortsetzungsbereiches $F_{0.3}^{(3.49)} = (0, x_1) = (0, 0.4998)$ ohne weitere Massenverschiebungen wie für $q = 3.51$. Der rechte Randpunkt x_1 des lokalen Fortsetzungsbereiches wird nach der 5. Iteration mit 0.499825 sehr genau bestimmt. Die ermittelte Austrittswahrscheinlichkeit am Punkt x_1 liegt mit 0.60021 ebenfalls sehr dicht am Wert $p = x_0/x_1 = 0.60024$. Der Zielfunktionswert $v_1(0.3) = 1.7344$ wird korrekt ermittelt.

3. $q = -12.49$:

Die Ergebnisse für diesen Fall sind in den nachfolgenden Tabellen 1.16 und 1.17 zusammengefasst.

Iteration	M	ZFW	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
1	20	1.427	0.0	1.0				
2	20	1.31504	0.0	0.05	0.3	0.6	0.95	1.0
3	20	1.315	0.0	0.0025	0.3	0.33	1.0	
4	20	1.315	0.0	0.000125	0.3	0.303	1.0	
5	20	1.315	0.0	0.0001	0.3	0.3003	1.0	

Tabelle 1.16: Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen für $q = -12.49$

Iteration	M	$\mu_{\tau,0}^{(1)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(2)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(3)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(4)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(5)}$	i
1	20	1.0	0, 7, 10, 11, 20								
2	20	0.047619	0	0		0.952381	1	0		0	
3	20	0.00497512	0	0		0.995025	1	0			
4	20	0.00049975	0	0		0.9995	1	0			
5	20	0.00029991	0	0		0.9997	6	0			

Tabelle 1.17: Massenverteilung und Rücktransformation der Iterationen für $q = -12.49$

Im ersten Schritt erhält man mit der Rücktransformation $R^{(20)}(\underline{\mu}_\tau)_0 = 0.18252$, $R^{(20)}(\underline{\mu}_\tau)_7 = 0.729494$, $R^{(20)}(\underline{\mu}_\tau)_{10} = 0.0771473$, $R^{(20)}(\underline{\mu}_\tau)_{11} = 0.0105215$ und $R^{(20)}(\underline{\mu}_\tau)_{20} = 0.000316445$. Neben der Tatsache, dass erneut Masse an das rechte Intervallende von E gelegt wird, ist auffällig, dass am rechten Rand des lokalen Fortsetzungsbereiches $F_{0.3}^{(-12.49)} = (0, 0.300091)$ die Rücktransformation für drei verschiedene Punkte positive Werte liefert. Dadurch kann im 2. Schritt mit dem Intervall $(s_3, s_4) = (0.3, 0.6)$ zunächst nur eine relativ grobe Einschachtelung vorgenommen werden. In den weiteren Iterationen erhält man hier dann mit der Rücktransformation eine eindeutige Zuordnung der Masse. Nach der 5. Iteration wird der rechte Randpunkt x_1 des lokalen Fortsetzungsbereiches mit 0.30009 sehr genau bestimmt. Die Austrittswahrscheinlichkeit p am Punkt x_1 ($p = 0.3/0.300091 = 0.9997$) und der Zielfunktionswert $v_1(0.3) = 1.315$ werden korrekt ermittelt.

4. $q = -12.51$:

Die Ergebnisse sind in den Tabellen 1.18 und 1.19 zusammengefasst.

Im ersten Schritt erhält man die gleichen Momente für μ_τ und μ wie im Fall $q = -12.49$. Damit liefert auch die Rücktransformation wieder die dort angegebenen Werte. Hier läuft die Verfeinerung nicht ganz geradlinig, in der 3. und 4. Iteration wird noch eine geringe Masse an den Punkt 0 gelegt, erst bei der weiteren Verfeinerung konzentriert sich die volle Masse bei der Rücktransformation um den Startpunkt $x_0 = 0.3$. Dabei muss jedoch ein kleines Intervall $(0, s_1)$ Bestandteil der Verfeinerung bleiben, da andernfalls ein ähnlicher Effekt wie im Fall $q = 3.51$ auftritt. Lässt man den Punkt s_1 in der Verfeinerung weg, so verrutscht ein kleiner Massenanteil wiederum an den Punkt 0, der dann aber bei weiterer Verfeinerung bei 0 nicht dort verbleibt.

Iteration	M	ZFW	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
1	20	1.4267	0.0	1.0				
2	20	1.315	0.0	0.05	0.3	0.6	0.95	1.0
3	20	1.315	0.0	0.275	0.33	1.0		
4	20	1.315	0.0	0.01375	0.297	0.30525	1.0	
5	20	1.315	0.0	0.0007	0.2994	0.3008	1.0	
6	20	1.315	0.0	0.000035	0.29989	0.3001	1.0	

Tabelle 1.18: Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen für $q = -12.51$

Iteration	M	$\mu_{\tau,0}^{(1)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(2)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(3)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(4)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(5)}$	i
1	20	1.0	0, 7, 10, 11, 20								
2	20	0.0		0.5455	19	0.4545	1	0		0	
3	20	0.001474	0	0.9985	9, 10	0					
4	20	$1.7612 \cdot 10^{-5}$	0	0		0.99998	7, 8	0			
5	20	0		0		1.0	8, 9	0			
6	20	0		0		1.0	10, 11	0			

Tabelle 1.19: Massenverteilung und Rücktransformation der Iterationen für $q = -12.51$

Nach dem 6. Schritt wird durch die Rücktransformation die Masse 0.52381 auf den Punkt 0.299995 und die Masse 0.47619 auf den Punkt 0.3000055 gelegt. Damit kann man davon ausgehen, dass der Prozess direkt im Startpunkt $x_0 = 0.3$ gestoppt wird. Die Zielfunktion $v_1(0.3) = G(0.3) = 1.315$ wird ebenfalls exakt ermittelt.

Nun stellt sich natürlich die Frage, wieso die Zielfunktionen v_1 für $q = -12.49$ und $q = -12.51$ übereinstimmen sollen. Lässt man sich mit Mathematica für $q = -12.49$ den Wert von $v_1(0.3)$ auf 16 Stellen nach dem Komma anzeigen, so erhält man die Zahl 1.3150001363749084. Die Zielfunktion v_1 ist also doch minimal größer. Auf der anderen Seite unterscheiden sich die lokalen Fortsetzungsbereiche und damit die optimalen Stoppregeln in beiden Fällen erheblich.

Für andere Startwerte x_0 funktioniert die Verfeinerung ebenfalls in allen 4 Fällen. Man erhält keine nennenswerten Abweichungen von der optimalen Zielfunktion v_1 und die lokalen Fortsetzungsbereiche werden korrekt erkannt. Auf eine grafische Darstellung analog zu Abbildung 1.3 soll hier verzichtet werden.

Bemerkungen :

1. In einigen Fällen wird durch CPLEX das Ergebnis mit der Warnung **unscaled infeasibilities** ausgegeben. Die Ergebnisse erweisen sich aber auch in diesen Fällen als brauchbar. Darüber hinaus macht man auch für niedrigere Ordnungen, bei denen eine solche Warnung nicht mehr auftritt, ähnliche Beobachtungen bei der Rücktransformation wie oben beschrieben. Deshalb sind der Einfachheit halber die numerischen Rechnungen durchgängig mit der Ordnung $M = 20$ durchgeführt worden. Die Warnung wird ab hier nicht mehr gesondert gekennzeichnet.

2. In Anbetracht des Einführungsbeispiels ohne Verlaufsgewinne wäre es denkbar gewesen, die Momente, die zu Teilmaßen $\mu_\tau^{(j)}$ gehören, für die aufgrund der vorangegangenen Rücktransformation angenommen wird, dass sie Null sind, wirklich im linearen Programm wegzulassen. Anhand der in den Beispielen 1 und 4 auftretenden Massenverschiebungen bei späteren Schritten der Verfeinerung zeigt sich, dass eine solche Vorgehensweise zu falschen Aussagen über den Träger von μ_τ führen kann.

Zum Abschluss dieses Abschnittes soll die Zielgewinnfunktion G verändert werden, um zwei Beispiele betrachten zu können, für die Fall 5 in (1.57) eintritt. Dazu betrachten wir

$$G(x) = 1 + 9x - 59x^2 + 100x^3 - 50x^4,$$

d.h. bis auf den konstanten Term wurden alle Terme der ursprünglichen Funktion mit -1 multipliziert. Für diese Zielgewinnfunktion sollen $q = 0$ und $q = -8.0$ als konstante Verlaufsgewinne betrachtet werden.

Im Fall $q = 0$ bildet die optimale Gewinnfunktion auf dem lokalen Fortsetzungsbereich eine Gerade, die sich genau an den beiden lokalen Maximalpunkten der Zielgewinnfunktion G in $x_1 = 0.1$ und $x_2 = 0.9$ an G anschmiegt. Die Funktion G und die optimalen Gewinnfunktionen v_1 für beide Fälle sind in der nachfolgenden Abbildung 1.6 dargestellt.

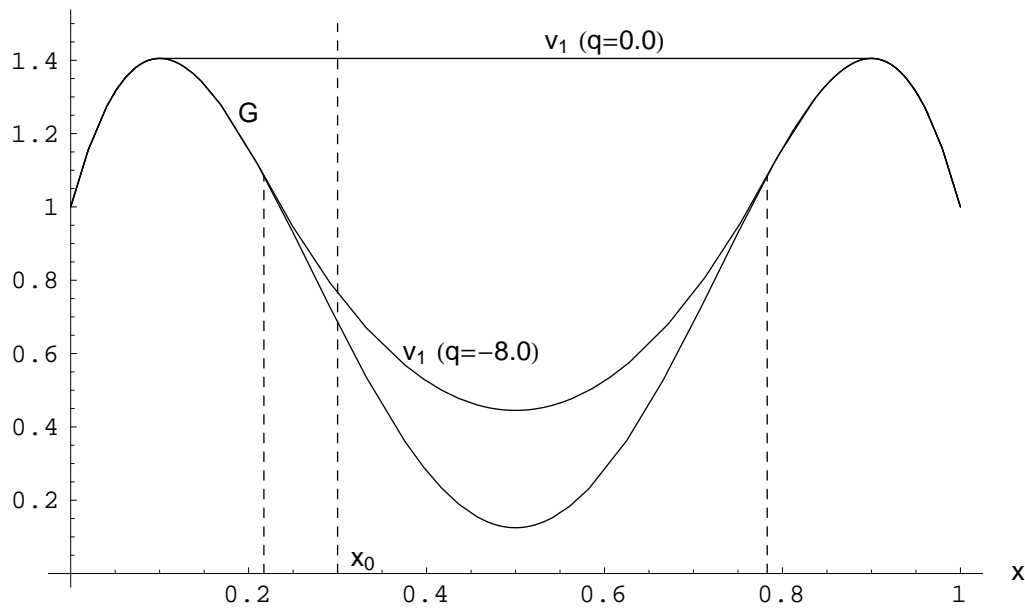


Abbildung 1.6: Die veränderte Zielgewinnfunktion G und optimalen Gewinnfunktionen v_1 für die Fälle $q = 0.0$ und $q = -8.0$

1. $q = 0.0$:

Die numerischen Resultate sind in den Tabellen 1.20 und 1.21 zusammengefasst.

Im ersten Schritt liefert die Rücktransformation $R^{(20)}(\underline{\mu}_\tau)_2 = 0.75$ und $R^{(20)}(\underline{\mu}_\tau)_{18} = 0.25$. Die Identifizierung der beiden Randpunkte $x_1 = 0.1$ und $x_2 = 0.9$ des lokalen Fortsetzungsbereiches und der zugehörigen Austrittswahrscheinlichkeiten $p_1 = (x_2 - x_0)/(x_2 - x_1) = 0.75$ und $p_2 =$

Iteration	M	ZFW	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
1	20	1.5895	0.0	1.0				
2	20	1.4092	0.0	0.05	0.15	0.85	0.95	1.0
3	20	1.405	0.0	0.0095	0.105	0.895	0.905	1.0
4	20	1.405	0.0	0.00995	0.1005	0.8995	0.9005	1.0
5	20	1.405	0.0	0.009995	0.10005	0.89995	0.90005	1.0

Tabelle 1.20: Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen für $q = 0.0$

Iteration	M	$\mu_{\tau,0}^{(1)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(2)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(3)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(4)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(5)}$	i
1	20	1.0	2, 18								
2	20	0		0.75	10	0		0.25	10	0	
3	20	0		0.75	10	0		0.25	10	0	
4	20	0		0.75	10	0		0.25	10	0	
5	20	0		0.75	10	0		0.25	10	0	

Tabelle 1.21: Massenverteilung und Rücktransformation der Iterationen für $q = 0.0$

$(x_0 - x_1)/(x_2 - x_1) = 0.25$ verläuft völlig geradlinig. Bemerkenswert ist lediglich die große Abweichung des Zielfunktionswertes vom korrekten Wert $v_1(0.3) = G(0.1) = G(0.9) = 1.405$ im ersten Schritt, obwohl schon hier x_1, x_2, p_1 und p_2 korrekt bestimmt werden. Diese Abweichung ist allein darauf zurückzuführen, dass sich der Vektor $\{\mu_i^\tau\}_{i \leq 20}$ auf der Kante befindet, die die 2. und 18. Ecke des Hausdorffpolytopes \mathcal{H}_{20} verbindet (vgl. 1. Zeile in Tabelle 1.21 und Lemma 1.9) und diese Kante vollständig außerhalb des Momentenraumes der Ordnung 20 liegt.

2. $q = -8.0$:

Für dieses Beispiel sind die numerischen Resultate in den Tabellen 1.22 und 1.23 zusammengefasst.

Hier erhält man im ersten Schritt die folgende Massenverteilung mit der Rücktransformation $R^{(20)}(\underline{\mu}_\tau)_1 = 0.0188646$, $R^{(20)}(\underline{\mu}_\tau)_4 = 0.809753$ und $R^{(20)}(\underline{\mu}_\tau)_{16} = 0.171383$. Nach dem 5. Schritt ermittelt man die Werte 0.21715 und 0.782845 als Näherungen für die Randpunkte des lokalen Fortsetzungsbereiches $F_{0.3}^{(-8.0)}$.

Die Lösung des Variationsproblem liefert $x_1 = 0.217157$ und $x_2 = 0.782843$ als Randpunkte des lokalen Fortsetzungsbereiches $F_{0.3}^{(-8.0)}$ und $v_1(x) = 8x^2 - 8x + 2.445$ als optimale Gewinnfunktion innerhalb von $F_{0.3}^{(-8.0)}$. Damit ist $v_1(0.3) = 0.765$. Auf der Menge $[0, 1] \setminus F_{0.3}^{(-8.0)}$ ist $v_1 = G$. Die zugehörigen Austrittswahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 sind $p_1 = (x_2 - x_0)/(x_2 - x_1) = 0.8535$ und $p_2 = (x_0 - x_1)/(x_2 - x_1) = 0.1464$.

Auch für dieses Beispiel werden also die Werte für x_1, x_2, p_1, p_2 und $v_1(x_0)$ sehr genau bestimmt.

Iteration	M	ZFW	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
1	20	0.9302	0.0	1.0				
2	20	0.7705	0.0	0.25	0.75	0.85	1.0	
3	20	0.7651	0.0	0.2	0.225	0.78	0.79	1.0
4	20	0.765	0.0	0.21625	0.21875	0.7825	0.7835	1.0
5	20	0.765	0.0	0.217	0.21725	0.7828	0.7829	1.0

Tabelle 1.22: Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen für $q = -8.0$

Iteration	M	$\mu_{\tau,0}^{(1)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(2)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(3)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(4)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(5)}$	i
1	20	1.0	1, 4, 16								
2	20	0.847162	17	0		0.152838	7	0			
3	20	0		0.854111	14	0		0.145889	6	0	
4	20	0		0.853507	7	0		0.146493	7	0	
5	20	0		0.853543	12	0		0.146457	9	0	

Tabelle 1.23: Massenverteilung und Rücktransformation der Iterationen für $q = -8.0$

1.5.2 Verlaufskosten höherer Ordnung

Zum Abschluss der Beispiele für den Wienerprozess soll nun noch der Fall von quadratischen Verlaufsgewinnen stehen. Dabei handelt es sich um die höchste Ordnung für Verlaufsgewinne, für die sich die zugehörigen Variationsprobleme noch analytisch lösen lassen. Die Verlaufsgewinnfunktion Q sei

$$Q(x) = 12x^2 + 5,$$

die Zielgewinnfunktion G bleibt unverändert

$$G(x) = 1 + 9x - 59x^2 + 100x^3 - 50x^4.$$

Der Startpunkt x_0 ist weiterhin 0.3. Dann liefert das Variationsproblem das Intervall $(x_1, 1)$ als lokalen Fortsetzungsbereich F_{x_0} und die Menge $[0, x_1] \cup \{1\}$ als Stoppbereich, wobei

$$x_1 = \frac{1}{36} (13 - \sqrt{151}) \approx 0.0197721$$

ist. Weiterhin erhält man $v_1(x_0) = 2.64751$. Die linearen Nebenbedingungen in den linearen Programmen (1.39) und (1.56) bleiben wiederum unverändert, es wird lediglich noch die Variable μ_2 in den Zielfunktionen (1.58) und (1.59) berücksichtigt.

Die nachfolgenden Tabellen 1.24 und 1.25 zeigen die Ergebnisse der Verfeinerung. Die Tabellen sind identisch zu denen im letzten Abschnitt angelegt. Man kann erkennen, dass der linke

Randpunkt x_1 des lokalen Fortsetzungsbereiches nach dem 5. Schritt mit 0.019775 sehr gut identifiziert wird und auch die Zielfunktionswerte sich sehr schnell an $v_1(x_0)$ annähern. Für andere Startwerte x_0 sind die Ergebnisse ähnlich gut.

Iteration	M	ZFW	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
1	20	2.7075	0.0	1.0			
2	20	2.6504	0.0	0.1	0.95	1.0	
3	20	2.6476	0.0	0.015	0.025	0.975	1.0
4	20	2.6475	0.0	0.0195	0.0205	0.99875	1.0
5	20	2.6475	0.0	0.01975	0.01985	0.9999	1.0

Tabelle 1.24: Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen bei quadratischem Verlaufsgewinn

Iteration	M	$\mu_{\tau,0}^{(1)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(2)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(3)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(4)}$	i
1	20	1.0	1, 20						
2	20	0.71429	4	0		0.28571	20		
3	20	0		0.71429	10	0		0.28571	20
4	20	0		0.71414	6	0		0.28586	20
5	20	0		0.71412	5	0		0.28588	20

Tabelle 1.25: Massenverteilung und Rücktransformation für die einzelnen Iterationen bei quadratischem Verlaufsgewinn

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass der vorgeschlagene Algorithmus für den Fall des Wienerprozesses durchgehend sehr gute Ergebnisse erzielt. In allen Fällen ist dafür allerdings eine genaue Identifizierung des Trägers des Stoppmaßes μ_τ notwendig. Diese wird jedoch durch den Algorithmus geliefert.

1.6 Stoppprobleme für das Cox–Ingersoll–Ross Modell

1.6.1 Das Modell und erste numerische Resultate

Weitere Beispiele, die insbesondere in Bezug auf Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften und der Finanzmathematik von Interesse sind, ergeben sich aus Stoppproblemen im Zusammenhang mit dem Cox–Ingersoll–Ross Modell für die kurzfristige Zinsrate (short term interest rate, Tageszins). Hier soll der Spezialfall konstanter Parameter betrachtet werden, d.h. es wird vorausgesetzt, dass die kurzfristige Zinsrate r_t die stochastische Differentialgleichung (1.60)

$$dr_t = (a - br_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad (1.60)$$

erfüllt. Dabei sind a und σ positive Konstanten, $b \in \mathbb{R}$ und W_t der Standard-Wienerprozess in \mathbb{R} . Für eine detailliertere Einführung sei auf Elliot und Kopp [16], Baxter und Rennie [2] sowie die dort aufgeführten Quellen verwiesen. Ein wesentlicher Vorteil dieser Modellierung gegenüber

einer Reihe weiterer Modelle für die kurzfristige Zinsrate ist die Tatsache, dass für bestimmte Parameterkonstellationen die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess r_t den Wert 0 annimmt, gleich Null ist. Diese Bedingung ist $a \geq \sigma^2/2$ und gleichzeitig hinreichend und notwendig für die Positivität von r_t .

Zu dem durch die Gleichung (1.60) definierten Prozess r_t gehört der nachfolgende infinitesimale Generator A

$$Af(x) = (a - bx)f'(x) + \frac{\sigma^2}{2}xf''(x) \quad \text{für } f \in C^2(\mathbb{R}). \quad (1.61)$$

Im Weiteren sollen Stopp Probleme auf abgeschlossenen Intervallen betrachtet werden, für die die Austrittswahrscheinlichkeiten von r_t an beiden Intervallenden positiv ist. Da die obige Bedingung $a \geq \sigma^2/2$ – vom letzten Beispiel in Abschnitt 1.6.2 abgesehen – stets erfüllt ist, werden deshalb Intervalle der Form $E = [x_1, 1]$ mit $0 < x_1 < 1$ betrachtet. Es wird wiederum Absorption am Rand von E vorausgesetzt. Der infinitesimale Generator wird damit zu

$$Af(x) = \left((a - bx)f'(x) + \frac{\sigma^2}{2}xf''(x) \right) \mathbb{1}_{\text{int}E}(x) \quad \text{für } f \in C^2(E) = \mathcal{D}(A) \quad (1.62)$$

und $x \in E$ modifiziert.

Damit ergeben sich die folgenden Gleichungsnebenbedingungen im linearen Programm (1.39)

$$\mu_i^\tau - \frac{\sigma^2}{2}i(i-1)\mu_{i-1} + ib\mu_i - ia\mu_{i-1} = x_0^i \quad \text{für } 2 \leq i \leq M,$$

$$\mu_1^\tau + b\mu_1 - a\mu_0 = x_0 \quad \text{und} \quad \mu_0^\tau = 1.$$

Das lineare Programm für die Verfeinerung bezüglich μ_τ leitet sich dann daraus analog wie im Fall des Wienerprozesses ab. Um die Lesbarkeit des Programmes zu verbessern und für μ_τ , neben den üblichen Transformationen bei den Verfeinerungen, auf die Transformation des Intervalls $[x_1, 1]$ auf das Intervall $[0, 1]$ verzichten zu können, wird in allen Rechnungen der erste echte Unterteilungspunkt s_2 stets gleich x_1 gesetzt und $\mu_{\tau,0}^{(1)} = 0$ verlangt, d.h. auf dem Intervall $[0, x_1)$ hat das Maß μ_τ keine Masse. Für die Variablen μ_i muss allerdings eine Transformation von E auf $[0, 1]$ vorgenommen werden.

Das erste Beispiel wird für die folgende Parameterkonstellation betrachtet

$$a = 1, \quad b = -1, \quad \sigma = 1, \quad x_0 = 0.3 \quad \text{und} \quad x_1 = 0.2.$$

Die Zielgewinnfunktion G sei

$$G(x) := x^2 - x^3 \quad \text{für } x_1 < x < 1$$

und die Verlaufsgewinnfunktion $Q \equiv 0$.

Für diese Werte erhält man x_1 als linken Randpunkt des lokalen Fortsetzungsbereiches F_{x_0} und löst dann das freie Randwertproblem (1.63)

$$\frac{\sigma^2 x}{2} v''(x) + (ax - b) v'(x) = 0 \quad \text{für } x_1 < x < x_2,$$

$$v(x_1) = G(x_1), \quad v(x_2) = G(x_2) \quad \text{und} \quad v'(x_2) = G'(x_2) \quad (1.63)$$

in v und x_2 . Gilt für eine Lösung dann $x_1 < x_2 < 1$, $v(x) > G(x)$ und $v(x) > \tilde{v}(x)$ für alle $x_1 < x < x_2$, dann ist die Funktion v die optimale Wertfunktion v_1 für das Stoppproblem (1.3) auf dem Intervall $[x_1, x_2]$. Dabei ist \tilde{v} die Lösung des festen Randwertproblems (1.64)

$$\frac{\sigma^2 x}{2} \tilde{v}''(x) + (ax - b) \tilde{v}'(x) = 0 \quad \text{für } x_1 < x < 1,$$

$$\tilde{v}(x_1) = G(x_1) \quad \text{und} \quad \tilde{v}(1) = G(1). \quad (1.64)$$

Das freie Randwertproblem (1.63) wird durch Vorwärts- und Rückwärtsschießen gelöst und so der rechte Randpunkt x_2 ermittelt. Für die obigen Parameter erhält man so $x_2 = 0.64456$ und $v(0.3) = 0.098134$ mit Mathematica als Näherungslösungen. Mit diesem Wert für x_2 erfüllt die Lösung v auch die Bedingung $v(x) > G(x)$ für alle $0.2 < x < 0.64456$ (vgl. auch Abbildung 1.7). Die Lösung \tilde{v} des Randwertproblems (1.64) ist auf dem gesamten Intervall $[x_1, 1]$ kleiner als Q .

In den nachfolgenden Tabellen 1.26 und 1.27 sind die Ergebnisse für die einzelnen Schritte des Verfeinerungsalgorithmus zusammengefasst.

Iteration	M	ZFW	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
1	20	0.10292	0.2	1.0				
2	15	0.10183	0.2	0.24	0.6	0.68	0.96	1.0
3	15	0.10125	0.2	0.203	0.648	0.659	0.997	1.0
4	15	0.10185	0.2	0.2002	0.648	0.6495	1.0	

Tabelle 1.26: Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen für $a = 1$, $b = -1$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0.3$ und $x_1 = 0.2$

Iteration	M	$\mu_{\tau,0}^{(2)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(3)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(4)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(5)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(6)}$	i
1	20	1.0	0, 11, 20								
2	15	0.39815	0	0		0.60168	10	0		0.0001622	15
3	15	0.40212	0	0		0.59788	1	0		0	
4	15	0.40117	0	0		0		0.59883	1		

Tabelle 1.27: Massenverteilung und Rücktransformation für die einzelnen Iterationen für $a = 1$, $b = -1$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0.3$ und $x_1 = 0.2$

Im ersten Schritt ergibt die Rücktransformation die folgenden von Null verschiedenen Werte

$$R^{(20)}(\underline{\mu}_{\tau}^{(2)})_0 = 0.424006, \quad R^{(20)}(\underline{\mu}_{\tau}^{(2)})_{11} = 0.575747 \quad \text{und} \quad R^{(20)}(\underline{\mu}_{\tau}^{(2)})_{20} = 0.000247.$$

Die ermittelten Zielfunktionswerte sind im Vergleich zur Lösung des freien Randwertproblems (1.63) nicht mehr so genau wie im Falle des Wienerprozesses. Weiterhin fällt auf, dass erst im 4. Schritt erkannt wird, dass das Maß μ_{τ} keine Masse bei 1 hat. Legt man den Wert $x_2 = 0.64456$ zugrunde, so schlägt nach dem 2. Schritt die Identifikation bereits fehl, da danach x_2 außerhalb des Intervalls $[s_4, s_5] = [0.648, 0.659]$ liegt. Die Massenverteilung im 3. Schritt zeigt diesen Fehler allerdings noch nicht an. Erst im 4. Schritt liegt keine Masse mehr in diesem Intervall, wobei dieser Massenanteil dann in das Intervall $[s_5, s_6]$ verschoben wurde und nicht, wie zu erwarten, in das Intervall $[s_3, s_4]$. Weitere Versuche, den rechten Randpunkt x_2 des lokalen Fortsetzungsbereiches $F_{0,3}$ mit einer besseren Genauigkeit als 10^{-2} zu bestimmen, führen ebenfalls nicht zum Ziel. Auch für andere Startwerte x_0 und andere Parameterkonstellationen für den Prozess r_t erhält man z.T. die Ergebnisse nicht mit der gewünschten Genauigkeit von z.B. 10^{-5} . Es sind des Öfteren auch ähnlich widersprüchliche Resultate, wie oben beschrieben, zu beobachten.

1.6.2 Weitere Testfunktionen im verfeinerten linearen Programm

Diese Beobachtungen motivieren eine Modifikation des Verfeinerungsalgorithmus. Dabei wird die Klasse der Testfunktionen $\{x^n\}_{n \leq M}$ für das Problem (1.5) vergrößert, wenn ab dem zweiten Schritt bereits eine Unterteilung von E in Teilintervalle $\{E_j^{\tau}\}_{j=1,2,\dots,l}$ mit den Randpunkten s_1, \dots, s_{l+1} vorliegt. Dann werden die nachfolgenden Funktionen $f_{i,n} \in C^2(E)$ für $3 \leq n \leq M$ und $2 \leq i \leq l$ definiert

$$f_{i,n}(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < s_i \\ (x - s_i)^n & \text{für } x \geq s_i. \end{cases}$$

Übernimmt man nun die Unterteilung $\{E_j^{\tau}\}_{j=1,2,\dots,l}$ auch für das Aufenthaltsmaß μ , so kann man mit diesen neuen Testfunktionen weitere Gleichungsnebenbedingungen im verfeinerten linearen Programm formulieren. Diese neuen Nebenbedingungen sind

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^n \left(\binom{n}{j} (-s_i)^{n-j} \sum_{k=i+1}^l \mu_{\tau,j}^{(k)} \right) - \frac{\sigma^2}{2} n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \left(\binom{n-2}{j} (-s_i)^{n-2-j} \sum_{k=i+1}^l \mu_{j+1}^{(k)} \right) \\ & + n b \sum_{j=0}^{n-1} \left(\binom{n-1}{j} (-s_i)^{n-1-j} \sum_{k=i+1}^l \mu_{j+1}^{(k)} \right) - n a \sum_{j=0}^{n-1} \left(\binom{n-1}{j} (-s_i)^{n-1-j} \sum_{k=i+1}^l \mu_j^{(k)} \right) \\ & = \mathbb{1}_{\{x_0 \geq s_i\}} (x_0 - s_i)^n \quad \text{für } 3 \leq n \leq M \quad \text{und} \quad 2 \leq i \leq l. \end{aligned}$$

Die Unterteilung von E auch für das Aufenthaltsmaß μ hat natürlich zur Folge, dass für die Teilmaße $\mu^{(i)}$ jeweils separat die Hausdorffbedingungen und die Transformationsgleichungen als

weitere Nebenbedingungen in das lineare Programm aufgenommen werden müssen. Wie oben wird auch $\mu_0^{(1)} = 0$ gefordert. Das zugehörige AMPL-Modellfile ist im Anhang B abgedruckt.

Diese Modifikation erweist sich insgesamt als stabiler als die ursprüngliche Formulierung. Im Fall des Wienerprozesses ergibt sie keine weitere Verbesserung der Resultate. Das liegt aber im Wesentlichen daran, dass dort die Ergebnisse ohnehin schon sehr genau sind. Für das Cox–Ingersoll–Ross bringt diese Formulierung allerdings deutlich bessere Resultate, wie man den nachfolgenden Tabellen 1.28 und 1.29 entnehmen kann. Dort sind für das obige Beispiel die Ergebnisse mit der Modifikation bei den Verfeinerungen angegeben.

Iteration	M	ZFW	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
1	20	0.10292	0.2	1.0				
2	15	0.098305	0.2	0.24	0.6	0.68	0.96	1.0
3	15	0.098598	0.2	0.203	0.637	0.648	1.0	
4	20	0.09848	0.2	0.2002	0.6443	0.6458	1.0	

Tabelle 1.28: Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen für $a = 1$, $b = -1$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0.3$ und $x_1 = 0.2$

Iteration	M	$\mu_{\tau,0}^{(2)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(3)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(4)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(5)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(6)}$	i
1	20	1.0	1, 11, 20								
2	15	0.42688	0	0		0.57312	8	0		0	
3	15	0.42435	0	0		0.57564	11	0			
4	15	0.42536	0	0		0.57464	10	0			

Tabelle 1.29: Massenverteilung und Rücktransformation für die einzelnen Iterationen für $a = 1$, $b = -1$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0.3$ und $x_1 = 0.2$

Diesmal wird nach dem 4. Schritt der Wert 0.64505 als Näherung für x_2 ermittelt. Auch der Zielfunktionswert liegt wesentlich dichter am oben ermittelten Wert von 0.098134 für $v_1(0.3)$ als der Zielfunktionswert im 4. Schritt in Tabelle 1.26. Auch für weitere Startpunkte $x_0 \in E = [0.2, 1]$ ergeben sich sehr genaue Werte für $v_1(x_0)$. Sowohl mit der LP-Methode als auch durch die Untersuchung des zugehörigen Variationsproblems ermittelt man die Menge $\{0.2\} \cup [x_2, 1]$ als Stoppbereich S für dieses Beispiel. Die Zielgewinnfunktion G und die optimale Gewinnfunktion v_1 sind in Abbildung 1.7 dargestellt, die numerischen Resultate liegen wie in Abbildung 1.3 direkt auf der Funktion v_1 . Auf ihre Darstellung soll hier verzichtet werden.

Mit der gleichen Zielgewinnfunktion G , aber anderen Parametern für r_t sollen noch zwei weitere Beispiele betrachtet werden.

Für das erste Beispiel werden die folgenden Parameter betrachtet

$$a = 1.0, \quad b = 7.0, \quad \sigma = 1.0, \quad x_0 = 0.8 \quad \text{und} \quad x_1 = 0.2.$$

Diese Konstellation entspricht mit $b > 0$ eher der Modellierung der kurzfristigen Zinsrate, da der Driftanteil $-br_t$ für wachsendes r_t dann die positive konstante Drift a kompensiert und

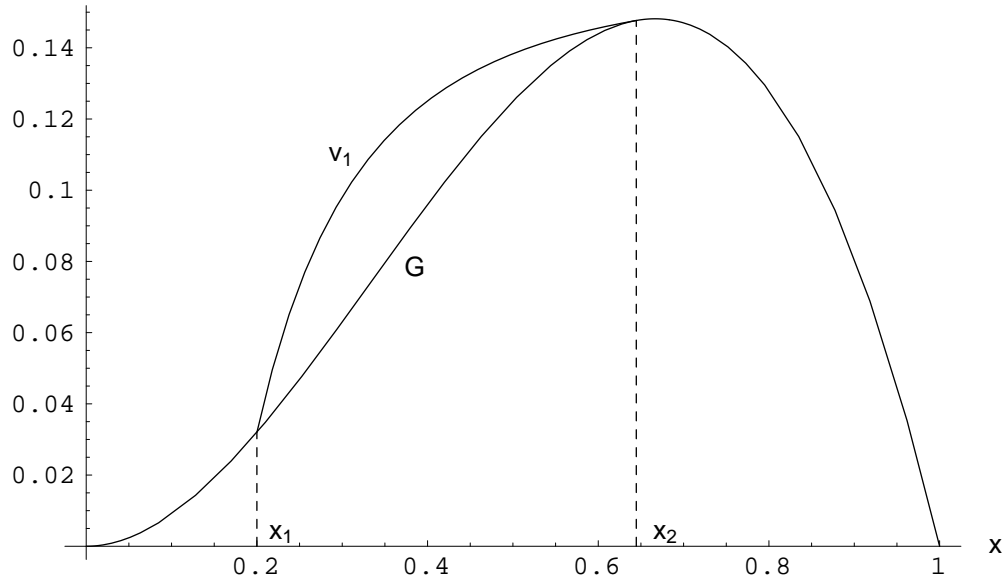


Abbildung 1.7: Die Zielgewinnfunktion G und die optimale Gewinnfunktion v_1 für die Parameter $a = 1$, $b = -1$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0.3$ und $x_1 = 0.2$

so ein beliebiges Anwachsen der Zinsrate r_t verhindert. Deshalb wird auch oft in der Literatur von vorneherein $b > 0$ verlangt (vgl. z.B. [16]). Wegen der hohen Rückstellrate b ist eher das Verhalten für Startwerte interessant, die größer als das lokale Maximum $2/3$ der Funktion G sind. Die numerischen Resultate sind in den Tabellen 1.30 und 1.31 angegeben.

Iteration	M	ZFW	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9
1	20	0.14314	0.2	1.0						
2	20	0.1371	0.2	0.24	0.36	0.44	0.64	0.72	0.96	1.0
3	20	0.136904	0.2	0.684	0.692	0.998	1.0			
4	20	0.136904	0.2	0.69	0.6908	0.9999	1.0			

Tabelle 1.30: Die Teilungspunkte s_i der einzelnen Iterationen für $a = 1$, $b = 7$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0.8$ und $x_1 = 0.2$

It.	$\mu_{\tau,0}^{(2)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(3)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(4)}$	$\mu_{\tau,0}^{(5)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(6)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(7)}$	$\mu_{\tau,0}^{(8)}$	i
1	1.0	0, 5, 12, 20										
2	0		0		0		0	0.92778	12	0	0.07222	20
3	0		0.92771	16	0	0.07229	20					
4	0		0.92775	13	0	0.07225	20					

Tabelle 1.31: Massenverteilung und Rücktransformation für die einzelnen Iterationen für $a = 1$, $b = 7$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0.8$ und $x_1 = 0.2$

Im ersten Schritt ergibt die Rücktransformation die folgenden von Null verschiedenen Werte

$$R^{(20)}(\underline{\mu}_{\tau}^{(2)})_0 = 1.59125 \cdot 10^{-5}, \quad R^{(20)}(\underline{\mu}_{\tau}^{(2)})_5 = 0.00114873,$$

$$R^{(20)}(\underline{\mu}_{\tau}^{(2)})_{12} = 0.913828 \quad \text{und} \quad R^{(20)}(\underline{\mu}_{\tau}^{(2)})_{20} = 0.0850071.$$

Nach dem 4. Schritt wird das Intervall $(0.69052, 1.0)$ näherungsweise als lokaler Fortsetzungsbereich $F_{0.8}$ ermittelt. Mit der numerischen Lösung des zugehörigen freien Randwertproblems erhält man das Intervall $(0.690509, 1.0)$ als lokalen Fortsetzungsbereich und $v_1(0.8) = 0.136903$, d.h. auch hier gelingt eine sehr genaue Identifikation mit dem modifizierten Verfeinerungsalgorithmus.

Die Parameter für das zweite Beispiel sind

$$a = 0, \quad b = -1, \quad \sigma = 1, \quad x_0 = 0.3 \quad \text{und} \quad x_1 = 0.289195.$$

Der linke Rand von E wurde diesmal so gewählt, dass sich für den Startwert $x_0 = 0.3$ genau das Intervall $[x_1, 0.5]$ als lokaler Fortsetzungsbereich ergibt. Die Bedingung $a \geq \sigma^2/2$ (vgl. S. 59) ist in diesem Beispiel nicht erfüllt. Als optimalen Gewinn erhält man $v_1(x_0) = 0.0635209$, was nur geringfügig größer als $G(x_0) = 0.063$ ist. Die beiden folgenden Tabellen 1.32 und 1.33 zeigen nun die Ergebnisse des modifizierten Verfeinerungsalgorithmus.

Iteration	M	ZFW	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
1	20	0.063614	0.289195	1.0			
2	20	0.063521	0.289195	0.33	0.5	0.58	1.0
3	20	0.063521	0.289195	0.292	0.5	0.504	1.0
4	15	0.063521	0.289195	0.2894	0.4998	0.5002	1.0
5	15	0.063521	0.289195	0.28921	0.49996	0.500002	1.0

Tabelle 1.32: Die Teilungspunkte s_i für die einzelnen Iterationen für $a = 0$, $b = -1$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0.3$ und $x_1 = 0.289195$

Iteration	M	$\mu_{\tau,0}^{(2)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(3)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(4)}$	i	$\mu_{\tau,0}^{(5)}$	i
1	20	1.0	0,7						
2	20	0.93879	0	0		0.06121	1	0	
3	20	0.937856	0	0		0.062144	0	0	
4	15	0.937853	0	0		0.062147	7	0	
5	15	0.937847	0	0		0.062152	1	0	

Tabelle 1.33: Massenverteilung und Rücktransformation der einzelnen Iterationen für $a = 0$, $b = -1$, $\sigma = 1$, $x_0 = 0.3$ und $x_1 = 0.289195$

Der Verfeinerungsalgorithmus identifiziert hier den rechten Rand des lokalen Fortsetzungsbereiches und $v_1(x_0)$ mit einer Genauigkeit von 10^{-5} . Dabei ist bemerkenswert, dass bereits im 2. Schritt eine sehr gute Näherung für $v_1(x_0)$ vorliegt.

Auch für andere Parameterkonstellationen und Zielfunktionen G liegen sehr gute Ergebnisse vor. Die zusätzlichen Testfunktionen liefern in den meisten Fällen deutliche Verbesserungen gegenüber der ursprünglichen Formulierung.

Im eindimensionalen Fall können nun weitere Prozessklassen betrachtet werden. Dazu zählen z.B. Wienerprozesse mit Drift, die geometrische Brownsche Bewegung, Besselprozesse oder Ornstein–Uhlenbeck–Prozesse. Für die geometrische Brownsche Bewegung wurden einige Rechnungen durchgeführt, die ebenfalls sehr gute Ergebnisse erbrachten. Es ist nun sicher von Interesse, auch für weitere der oben genannten Klassen zu überprüfen, ob dort ebenfalls gute Resultate erzielt werden.

1.7 Höherdimensionale Hausdorffpolytope und Rücktransformation

Es stellt sich nun die Frage, wie dieser Ansatz zur Lösung von Stoppproblemen für höherdimensionale Probleme funktioniert. Eine wichtige Fragestellung in diesem Zusammenhang ist die Übertragbarkeit der Aussagen von Satz 1.7 sowie von Lemma 1.8 und Lemma 1.9 auf höhere Dimensionen.

Für eine reellwertige Funktion u auf $E = [0, 1]^N$ und $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N$ bezeichnen wir mit

$$B_{n,u}(x) := \sum_{j=0}^n u_j^{(n)} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \quad \text{für } x \in E \quad (1.65)$$

das Bernsteinpolynom von u der Ordnung n , wobei $u_j^{(n)} := u(\frac{j_1}{n_1}, \dots, \frac{j_N}{n_N})$ ist (vgl. [29]). Dabei werden hier die abkürzenden Schreibweisen (1.38) und die iterierten Differenzen höherer Ordnung (vgl. (1.32) und (1.33)) verwendet.

Sei X eine Zufallsgröße auf $E = [0, 1]^N$ mit Verteilungsfunktion F und Momenten $\{\mu_{j_1, \dots, j_N}\}_{j_i \geq 0}$. Mittels vollständiger Induktion über die Summe der Komponenten von k und m überzeugt man sich, dass die Beziehung

$$(-1)^m \Delta^m \mu_k = \int_E x^k (1-x)^m dF(x)$$

für alle $k, m \in \mathbb{N}^N$ gilt. Damit liefert die Integration der Definitionsgleichung (1.65) bzgl. F die folgende Gleichung

$$\mathbf{E}_F B_{n,u} = \sum_{j=0}^n u_j^{(n)} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \Delta^{n-j} \mu_j. \quad (1.66)$$

Wir definieren analog zum eindimensionalen Fall

$$p_j^{(n)} := \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \Delta^{n-j} \mu_j \quad \text{für } j = (j_1, \dots, j_N) \quad \text{mit } 0 \leq j_i \leq n_i$$

und bezeichnen $R^{(n)} := \{p_j^{(n)}\}_{j=0}^n$ als N -dimensionale Rücktransformation der Ordnung n von μ . Die Schreibweise $\{.\}_{j=0}^n$ bedeutet dabei $\{.\mid 0 \leq j_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq j_N \leq n_N\}$. Dann erhält man für die Funktion $u(x) \equiv 1$ mit der Definitionsgleichung (1.65) die Beziehung $\mathbf{E}_F B_{n,u} = 1$ und damit $\sum_{j=0}^n p_j^{(n)} = 1$. Die N -dimensionale Rücktransformation von μ kann also als eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung $F^{(n)}$ auf den Punkten $\{(\frac{j_1}{n_1}, \dots, \frac{j_N}{n_N})\}_{j=0}^n$ aufgefasst werden.

Mit der Konvention, dass mit $n \rightarrow \infty$ die Konvergenz $n_i \rightarrow \infty$ für alle $i \in 1, \dots, N$ gemeint ist, gelten für die Bernsteinpolynome die folgenden Konvergenzaussagen (vgl. [25] und [29]) :

Satz 1.10 :

Sei u eine stetige Funktion auf $E = [0, 1]^N$ und F eine Verteilungsfunktion auf E , dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Die Bernsteinpolynome $B_{n,u}$ konvergieren für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen die Funktion u .
2. Es gilt

$$F^{(n)}(x) := \sum_{j \leq nx} p_j^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x) \quad (1.67)$$

für alle Punkte $x \in E$ an denen F stetig ist.

Analog zum eindimensionalen Fall werden nun die Begriffe Momentenraum und Hausdorffpolytop für höhere Dimensionen definiert.

Definitionen:

1. Die Menge \mathcal{M}_∞^N aller Folgen $\{\mu_j\}_{j \geq 0}$, deren Folgenglieder Momente einer Verteilung F auf $[0, 1]^N$ sind, heißt N -dimensionaler Momentenraum.
2. Die Menge $\mathcal{M}_n^N \subset \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ aller Folgen $\{\mu_j\}_{j=0}^{\tilde{n}}$ mit $\tilde{n} = (n_1 + 1) \cdot \dots \cdot (n_N + 1)$, deren Glieder die ersten \tilde{n} Momente einer Verteilung F auf $[0, 1]^N$ sind, heißt N -dimensionaler Momentenraum der Ordnung n .
3. Die Menge $\mathcal{H}_n^N \subset \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ aller Folgen $\{m_j\}_{j=0}^{\tilde{n}}$ mit $m_{(0, \dots, 0)} = 1$, die die Hausdorffbedingungen bis zur Ordnung n erfüllen, heißt N -dimensionales Hausdorffpolytop der Ordnung n .

Auch die Aussagen von Lemma 1.8 und Lemma 1.9 lassen sich auf höhere Dimensionen übertragen.

Lemma 1.11 :

Das Hausdorffpolytop \mathcal{H}_n^N hat $\tilde{n} := \prod_{i=1}^N (n_i + 1)$ Eckpunkte. Der Eckpunkt, der mit dem Multiindex $k = (k_1, \dots, k_n)$ mit $1 \leq k_i \leq n_i$ für $i = 1, \dots, N$ bezeichnet ist, hat die Koordinaten

$$\underline{\mu}^{(k)} = \left(\mu_{(0, \dots, 0, 0)}^{(k)}, \dots, \mu_{(0, \dots, 0, n_N)}^{(k)}, \dots, \mu_{(n_1, \dots, n_{N-1}, 0)}^{(k)}, \dots, \mu_{(n_1, \dots, n_{N-1}, n_N)}^{(k)} \right),$$

wobei

$$\mu_j^{(k)} = \prod_{i=1}^N \binom{n_i}{k_i}^{-1} \binom{n_i - j_i}{k_i - j_i} = \binom{n}{k}^{-1} \binom{n-j}{k-j}$$

ist. Für $t < 0$ wird dabei der Binomialkoeffizient $\binom{s}{t} = 0$ für alle $s \in \mathbb{N}$ gesetzt.

Beweis:

Für $\underline{\mu} = (\mu_{(0,\dots,0)}, \dots, \mu_{(n_1,\dots,n_N)}) \in \mathcal{H}_n^N$ gilt $\mu_{(0,\dots,0)} = 1$ und wegen Lemma 1.6

$$\sum_{j=0}^{n-l} \binom{n-l}{j} (-1)^j \mu_{l+j} \geq 0 \quad (1.68)$$

für alle Multiindizes l mit $0 \leq l \leq n$. Der Vektor $(\mu_{(0,\dots,0,1)}, \dots, \mu_{(n_1,\dots,n_N)}) \in \mathbb{R}^{\tilde{n}-1}$ muss also genau \tilde{n} lineare Ungleichungen erfüllen, damit $\underline{\mu} \in \mathcal{H}_n^N$ gilt. Damit werden in den Eckpunkten von \mathcal{H}_n^N mindestens $\tilde{n} - 1$ der obigen Ungleichungen (1.68) als Gleichheit angenommen. Man überzeugt sich leicht davon, dass die angegebenen Punkte $\underline{\mu}^{(k)}$ paarweise voneinander verschieden sind. Damit genügt es, wie im eindimensionalen Fall zu zeigen, dass sie genau $\tilde{n} - 1$ der obigen Ungleichungen als Gleichungen erfüllen und jeweils eine Ungleichung als strenge Ungleichung angenommen wird.

Sei $k \leq n$ beliebig, dann gilt $\mu_0^{(k)} = 1$. Darüber hinaus ist $\mu_l^{(k)} = 0$ für alle Multiindizes l mit $l_i > k_i$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, N\}$. Damit folgt, dass für diese l die obige Ungleichung (1.68) als Gleichheit angenommen wird, da in der Summe auf der linken Seite nur über Multiindizes mit dieser Eigenschaft summiert wird. Für $\underline{\mu}^{(k)}$ ergibt die linke Seite in (1.68) für $l = k$

$$\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j \mu_{k+j}^{(k)} = \binom{n-k}{0} (-1)^0 \mu_k^{(k)} = \binom{n}{k}^{-1} > 0.$$

Analog zum eindimensionalen Fall bleibt also zu zeigen, dass die Zahlen $\{\mu_j^{(k)}\}_{j \leq k}$ die Gleichungen

$$\sum_{j=0}^{k-l} \binom{n-l}{j} (-1)^j \mu_{l+j}^{(k)} = 0 \quad \text{für } l \leq k, \ l \neq k$$

erfüllen.

Es ist

$$\sum_{j=0}^{k-l} \binom{n-l}{j} (-1)^j \mu_{l+j}^{(k)} = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{j=0}^{k-l} \binom{n-l}{j} (-1)^j \binom{n-l-j}{k-l-j}.$$

Die Gleichung für die Binomialkoeffizienten aus dem Beweis von Lemma 1.8 lässt sich über die Bildung der Produkte auch auf den höherdimensionalen Fall übertragen und liefert hier

$$\binom{n-l}{j} \binom{n-l-j}{k-l-j} = \binom{k-l}{j} \binom{n-l}{k-l}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-l} \binom{n-l}{j} (-1)^j \mu_{l+j}^{(k)} &= \binom{n}{k}^{-1} \binom{n-l}{k-l} \sum_{j=0}^{k-l} \binom{k-l}{j} (-1)^j \\ &= \binom{n}{k}^{-1} \binom{n-l}{k-l} (1-1)^{k-l} = 0, \end{aligned}$$

da $l \neq k$.

□

Lemma 1.12 :

Seien n und k gegebene Multiindizes mit $k \leq n$ komponentenweise. Dann gilt für die Rücktransformation $R^{(n)}$ angewandt auf den Eckpunkt $\underline{\mu}^{(k)}$ des Hausdorffpolytops \mathcal{H}_n^N

$$R^{(n)}(\underline{\mu}^{(k)})_j = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis:

Das Hausdorffpolytop \mathcal{H}_n^N wird durch \tilde{n} Ungleichungsbedingungen beschrieben. Davon sind in der Ecke $\underline{\mu}^{(k)}$ genau $\tilde{n}-1$ aktiv, d.h. wegen Lemma 1.6 gilt für $\tilde{n}-1$ verschiedene Multiindizes $j \leq n$

$$(-1)^{n-j} \triangle^{n-j} \mu_j^{(k)} = 0.$$

Damit ist für diese j

$$R^{(n)}(\underline{\mu}^{(k)})_j = \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \triangle^{n-j} \mu_j^{(k)} = 0.$$

Es ist $\mu_{(0,\dots,0)}^{(k)} = 1$ und damit $\sum_{j=0}^n p_j^{(n)} = 1$. Also muss für den verbleibenden Multiindex $m \leq n$

$$R^{(n)}(\underline{\mu}^{(k)})_m = 1$$

gelten. Weiterhin ist

$$R^{(n)}(\underline{\mu}^{(k)})_k = \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \triangle^{n-k} \mu_k^{(k)}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \sum_{s=0}^{n-k} \binom{n-k}{s} (-1)^{n-k-s} \mu_{k+s}^{(k)} \\
&= \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \binom{n-k}{0} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}^{-1} \binom{n-k}{0},
\end{aligned}$$

da wegen Lemma 1.12 alle anderen Summanden in der obigen Summe Null sind. Also ist $R^{(n)}(\underline{\mu}^{(k)})_k = 1$. \square

Völlig analog zum eindimensionalen Fall lassen sich also das Bild der Ecke $\underline{\mu}^{(k)}$ unter $R^{(n)}$ als Diracmaß auf dem Punkt $(\frac{k_1}{n_1}, \dots, \frac{k_N}{n_N})$ und die Bildmenge $R^{(n)}(\mathcal{H}_n^N)$ als die Menge aller diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der Punktmenge $\{(\frac{k_1}{n_1}, \dots, \frac{k_N}{n_N})\}_{k_1 \leq n_1, \dots, k_N \leq n_N}$ interpretieren.

1.8 Ein zweidimensionales Beispiel

Zunächst soll ein zweidimensionales Beispiel untersucht werden, das auf dem Beispiel aus Abschnitt 1.3.5 aufbaut.

Wir betrachten den Standard-Wienerprozess \mathfrak{X} auf $E = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ mit Absorption am Rand, d.h.

$$Af(x) = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) \right) \mathbb{1}_{\text{int}E}(x) \quad \text{für } f \in C^2(E) \subset \mathcal{D}(A)$$

sowie die Zielgewinnfunktion

$$G(x) = (1 - 9x_1 + 59x_1^2 - 100x_1^3 + 50x_1^4)(1 - 9x_2 + 59x_2^2 - 100x_2^3 + 50x_2^4)$$

und die Verlaufsgewinnfunktion $Q \equiv 0$. Der Startpunkt sei $x_0 = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$.

Im linearen Programm (1.39) erhält man für eine gegebene Ordnung $\mathbf{M} = (M_1, M_2)$ die folgenden Gleichungsnebenbedingungen

$$\mu_{i_1, i_2}^\tau - \frac{1}{2} i_1(i_1 - 1) \mu_{i_1-2, i_2} - \frac{1}{2} i_2(i_2 - 1) \mu_{i_1, i_2-2} = \tilde{x}_1^{i_1} \tilde{x}_2^{i_2} \quad \text{für } 2 \leq i_1, i_2 \leq M_1;$$

$$\mu_{i_1, i_2}^\tau - \frac{1}{2} i_2(i_2 - 1) \mu_{i_1, i_2-2} = \tilde{x}_1^{i_1} \tilde{x}_2^{i_2} \quad \text{für } i_1 = 0, 1 \text{ und } 2 \leq i_2 \leq M_2;$$

$$\mu_{i_1, i_2}^\tau - \frac{1}{2} i_1(i_1 - 1) \mu_{i_1-2, i_2} = \tilde{x}_1^{i_1} \tilde{x}_2^{i_2} \quad \text{für } 2 \leq i_1 \leq M_1 \text{ und } i_2 = 0, 1;$$

$$\mu_{1,1}^\tau = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2; \quad \mu_{0,1}^\tau = \tilde{x}_2; \quad \mu_{1,0}^\tau = \tilde{x}_1 \quad \text{sowie} \quad \mu_{0,0}^\tau = 1.$$

Dazu kommen die Definitionsgleichungen für die iterierten Differenzen gemäß den Gleichungen (1.30) und (1.31) sowie die zweidimensionalen Hausdorffbedingungen (1.34) bis zur Ordnung \mathbf{M} für die Folgen $\{\mu_{i_1, i_2}^T\}_{i_1 \leq M_1, i_2 \leq M_2}$ und $\{\mu_{i_1, i_2}\}_{i_1 \leq M_1, i_2 \leq M_2}$. Die Größe des resultierenden linearen Programmes ist für verschiedene Ordnungen \mathbf{M} in Tabelle 1.34 auf Seite 73 angegeben.

1.8.1 Die Gewinnung von Vergleichswerten

Wir betrachten den Startpunkt $x_0 = (0.3, 0.3)$. Im Gegensatz zum eindimensionalen Fall ist hier die Lösung des zugehörigen Variationsproblems nicht mehr analytisch möglich. Auch ist die Menge aller konkaven Funktionen auf E nur noch eine echte Teilmenge der Menge aller \mathfrak{K} -exzessiven Funktionen. Da keine geeignete Software zur Lösung freier Randwertprobleme zur Verfügung stand, wurde die folgende Vorgehensweise zur Gewinnung von Vergleichswerten gewählt:

Zunächst erfolgt eine Diskretisierung des Problems und die Lösung des diskretisierten Stoppproblems wird mit der Wertiteration ermittelt. Die dabei ermittelte Approximation des Stoppbereiches S wird dann zur Lösung eines festen Randwertproblems herangezogen. Das Randwertproblem wird anschließend sowohl mit Neumannbedingungen als auch mit Dirichletbedingungen am Rand $\partial S \setminus \partial E$ gelöst. Liegen die beiden Lösungen dicht beieinander, so kann davon ausgegangen werden, dass die durch die Wertiteration gewonnene Approximation von S hinreichend genau ist.

Das Einheitsquadrat $E = [0, 1]^2$ wird mit einem äquidistanten Gitter \mathcal{G} von n Punkten auf jeder Achse diskretisiert. Dann wird mit der Wertiteration die Bellmangleichung

$$V((k_1 h, k_2 h)) = \begin{cases} \max \{\bar{v}(V, (k_1 h, k_2 h)), G((k_1 h, k_2 h))\} & \text{für } 1 \leq k_1, k_2 < n \\ G((k_1 h, k_2 h)) & \text{für } k_1, k_2 \in \{0, n\} \end{cases}$$

gelöst, wobei $h = 1/n$ die Gitterkonstante ist. Der Durchschnitt \bar{v} von einer Funktion v wird dabei für jeden Gitterpunkt $p \in \mathcal{G}$ über die Funktionswerte der vier Nachbarpunkte gebildet. Es ist also

$$\bar{v}(v, p) = \frac{1}{4} \left(v(p + h e_1) + v(p - h e_1) + v(p + h e_2) + v(p - h e_2) \right),$$

wobei e_1 und e_2 die Einheitsvektoren im \mathbb{R}^2 sind. Der zweidimensionale Wienerprozess auf E wird damit durch eine symmetrische Irrfahrt auf dem Gitter \mathcal{G} approximiert.

Als Startwert für die Wertiteration wird $V_0(p) = G(p)$ für alle Elemente p des Gitters gewählt. Ein einzelner Schritt der Wertiterationen erfolgt für jeden Gitterpunkt $p = (k_1 h, k_2 h)$ mit $1 \leq k_1 < n$ und $1 \leq k_2 < n$ nach der Vorschrift

$$V_{n+1}(p) = \max \{\bar{v}(V_n, p), G(p)\}.$$

Für jede Iteration wird die maximale Änderung d der Funktion V_n auf dem Gitter gemäß

$$d = \max \{V_{n+1}((k_1 h, k_2 h)) - V_n((k_1 h, k_2 h)) \mid 1 \leq k_1 < n, 1 \leq k_2 < n\}$$

berechnet. Unterschreitet diese maximale Änderung d einen vorgegebenen Wert $\varepsilon > 0$, so wird die Wertiteration abgebrochen. Dann ist V_{n+1} eine Approximation für die Wertefunktion V des diskretisierten Stoppproblems. Darüber hinaus ist die Menge

$$\tilde{S} = \{p \in \mathcal{G} \mid V_{n+1}(p) = G(p)\}$$

eine Näherung für den Stoppbereich des diskretisierten Problems.

In diesem Beispiel ist für die angegebene Approximation durch eine symmetrische Irrfahrt die gleichmäßige Konvergenz der Wertefunktion V gegen die Wertefunktion v_1 des stetigen Stoppproblems für $h \downarrow 0$ gesichert (vgl. [35] Abschnitt 10.6). Ist die Lösung τ des ursprünglichen Stoppproblems darüber hinaus eindeutig bestimmt, lässt sich daraus auch die Konvergenz der Stoppbereiche der diskretisierten Stopp Probleme gegen den Stoppbereich S ableiten. Dann kann die Menge \tilde{S} auch als eine gute Näherung für S angesehen werden.

Die Wertiteration ist für dieses Beispiel programmiert worden. Für $n = 100$ und $\varepsilon = 0.00001$ erhält man den Wert 2.10798 für die Wertefunktion V des diskretisierten Stoppproblems an der Stelle $x_0 = (0.3, 0.3)$. Für $n = 200$ und $\varepsilon = 0.00001$ wird 2.09937 berechnet. Lässt man sich den Stoppbereich \tilde{S} ausgeben, so erkennt man, dass die Menge $\partial E \cup B((0.5, 0.5), 0.1527)$ eine gute Näherung für den Stoppbereich S des ursprünglichen Stoppproblems ist. Mit $B(x, r)$ wird dabei die abgeschlossene Kugel mit dem Mittelpunkt x und dem Radius r in der Euklidischen Norm bezeichnet. Damit liegt der Punkt $x_0 = (0.3, 0.3)$ nicht im Stoppbereich S . Das ist auch deswegen klar, da $G(x_0) = 1.72923 < V(x_0)$ gilt.

Mit dieser Näherung für den Stoppbereich S reduziert sich das freie Randwertproblem, das aus dem Variationsproblem resultiert, auf eine partielle Differentialgleichung mit festen Randbedingungen. Für den zweidimensionalen Wienerprozess handelt es sich dabei um eine elliptische Gleichung. Die obige Näherung \tilde{S} für den Stoppbereich S wäre korrekt, wenn die Lösung des Randwertproblems mit Neumannbedingungen für $R := \partial B((0.5, 0.5), 0.1527)$ und Dirichletbedingungen für ∂E mit der Lösung des Randwertproblems mit Dirichletbedingungen für R und ∂E übereinstimmen würde. Das erste Problem wird im Weiteren kurz als Neumannproblem, das zweite als Dirichletproblem bezeichnet. Die Frage, ob die Näherung \tilde{S} exakt ist, kann allerdings nicht endgültig geklärt werden, da auch das Neumannproblem und das Dirichletproblem nur approximativ gelöst werden können.

Hier wurde nun die Toolbox für partielle Differentialgleichungen `pdetool` von MATLAB 5.3 zur Lösung genutzt. Das MATLAB-File für die Formulierung und Lösung des Neumannproblems ist im Anhang C angegeben.

Das Gebiet $E \setminus B((0.5, 0.5), 0.1527)$ wird mit einem Dreiecksgitter überzogen und in diesem konkreten Fall einmal verfeinert. Die Lösung für beide Probleme erfolgt mit dem Kommando `pdetool('solve')`. Dabei kommt die Finite Elemente Methode zur Anwendung. Weitere Details kann man [38] entnehmen. Für alle Gitterpunkte wird die Lösung im Vektor u zurückgegeben. Die maximale Differenz auf allen Gitterpunkten zwischen der Lösung des Dirichletproblems und des Neumannproblems beträgt hier 0.0142. Die Lösung des Dirichletproblems ist in Abbildung 1.8 als 3-D-Plot und als Konturplot dargestellt.

Der Punkt x_0 ist auch nach der Verfeinerung des Gitters kein Gitterpunkt. Um nun auch eine Näherung für $v_1(x_0)$ aus der Lösung des Neumann- bzw. Dirichletproblems zu bekommen, kann man z.B. auf dem entsprechenden Teildreieck, das x_0 enthält, die Funktion v_1 durch eine lineare Funktion approximieren, die in den Eckpunkten mit der berechneten Lösung übereinstimmt.

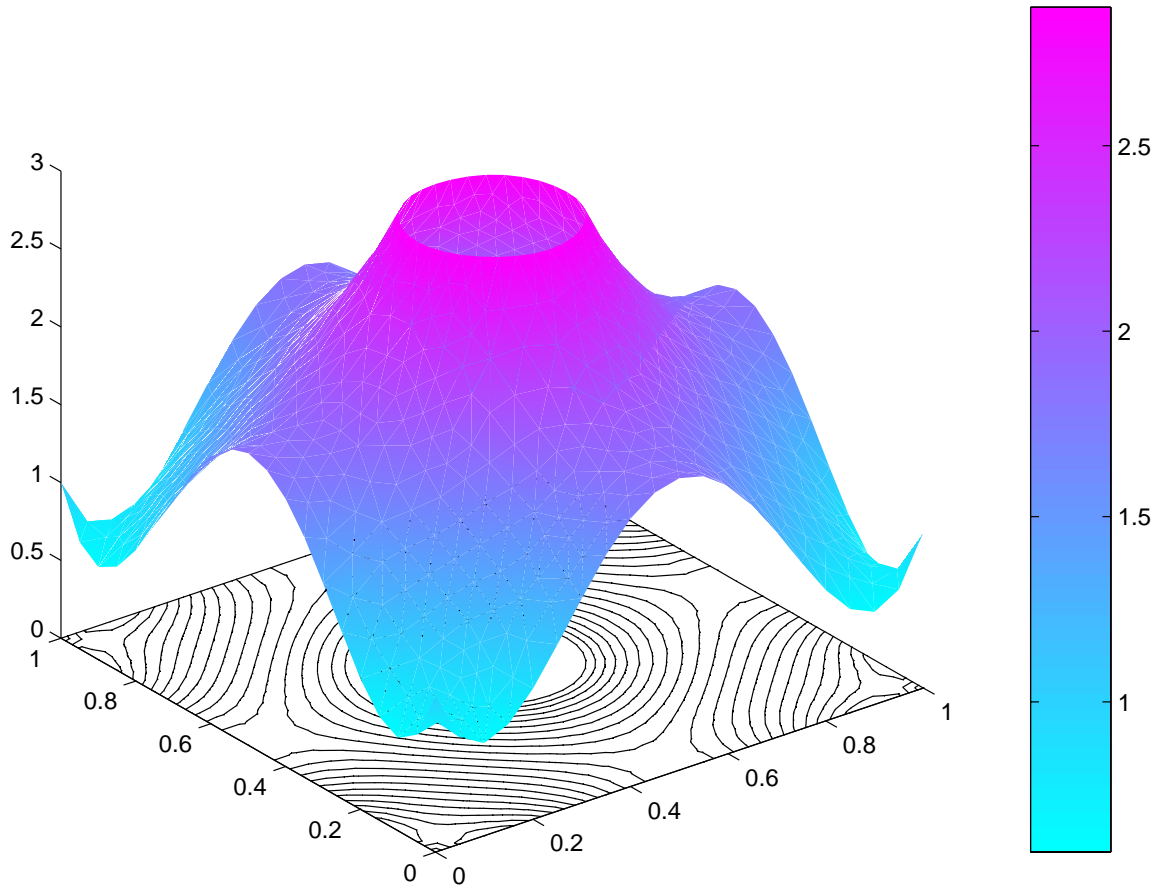


Abbildung 1.8: Lösung des Dirichletproblems für den oben vorausgesetzten Stoppbereich \tilde{S}

Dabei handelt es sich allerdings um eine recht grobe Approximation. Auf diese Weise gewinnt man für das Dirichletproblem den Wert 2.11508 und für das Neumannproblem den Wert 2.1139 als Näherung für $v_1(x_0)$.

Auch wenn noch ein geringfügiger Unterschied zwischen den Resultaten besteht, die man aus der Wertiteration und dem Neumann- bzw. Dirichletproblem für $v_1(x_0)$ erhält, so zeigt der geringe Abstand zwischen der Lösung des Neumann- und Dirichletproblems, dass die Näherung für den Stoppbereich S , die man mit der Wertiteration ermittelt hat, sehr genau ist.

Bemerkung: Auch wenn hier der Stoppbereich S nur näherungsweise bestimmt werden kann, so ist doch klar, dass für alle Startpunkte $x_0 \notin S$ der lokale Fortsetzungsbereich F_{x_0} eine zusammenhängende Menge ist. Damit ist für diese Punkte der Rand ∂S des Stoppbereiches S identisch mit dem Träger des Stoppmaßes μ_τ , da für den zweidimensionalen Wienerprozess der Drift- und Diffusionsanteil ortsunabhängig sind.

1.8.2 Numerische Resultate mit dem LP-Ansatz

Nun sollen zum Vergleich die Resultate betrachtet werden, die das lineare Programm auf Seite 69 liefert. Hier werden nur Ordnungen $\mathbf{M} = (M_1, M_2)$ betrachtet, für die $M_1 = M_2 =: M$ gilt. In der nachfolgenden Tabelle 1.34 sind nun für verschiedene Werte von M die Größe des

linearen Programmes sowie die Resultate für den CPLEX-Parameter **feasibility** 10^{-6} und 10^{-8} angegeben.

M	Variablen	Nebenbedingungen	feas. 10^{-6}	feas. 10^{-8}
7	2592	6688	3.7743	3.7712
8	4050	10611	3.2882	3.2678
9	6050	16050	3.0719	3.0325
10	8712	23353	2.9389	2.9375
11	12168	32904	2.8065	2.7858
12	16562	45123	2.7217	2.7132
13	22050	60466	2.6654	—

Tabelle 1.34: Numerische Resultate für $x_0 = (0.3, 0.3)$ bei Verwendung der iterierten Differenzen

Für $M = 13$ und den CPLEX-Parameter **feasibility** 10^{-8} wurde die Rechnung nach zwei Stunden Rechenzeit abgebrochen. Bis zur Ordnung $M = 10$ liegen die Rechenzeiten noch unter einer Minute. Auffallend im Vergleich zum eindimensionalen Fall ist der stark angestiegene Umfang des linearen Programmes. Darauf ist auch die wesentlich längere Rechenzeit zurückzuführen, die für die eindimensionalen Beispiele generell unter 10 Sekunden lag.

Ähnlich wie für die eindimensionalen Beispiele sind die numerischen Resultate zunächst wenig befriedigend. Nun stellt sich auch hier die Frage, ob die Rücktransformation weiterhilft und eine geeignete Unterteilung von E zu besseren numerischen Resultaten und möglicherweise auch zu einer Identifizierung des Stoppbereiches S führt. Die Ergebnisse aus Abschnitt 1.7 sichern zumindest, dass die Rücktransformation $R^{(M)}$ wie im eindimensionalen Fall auf die Werte $\{\mu_{i_1, i_2}^\tau\}_{i_1, i_2 \leq M}$ angewandt werden kann und eine analoge Interpretation erlaubt. Die nachfolgende Tabelle 1.35 enthält das Resultat der Rücktransformation für $M = 10$. Aus Platzgründen wurden alle Werte mit 10^3 multipliziert und nur auf 4 Stellen ausgegeben. Für das resultierende Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Gitter $\{(i_1/10, i_2/10)\}_{i_1, i_2 \leq 10}$ sind die einzelnen Massen also in Promille angegeben. Dabei sind die Zeilen den i_1 -Werten und die Spalten den i_2 -Werten zuzuordnen.

Prinzipiell wird die Masse durch die Rücktransformation so zugeordnet, wie man es aufgrund des oben ermittelten Stoppbereiches erwarten würde. Sieht man sich die Zahlen jedoch genauer an, so stellt man doch etliche Unstimmigkeiten fest. Zunächst einmal ist nicht einsichtig, warum $R^{(M)}(\underline{\mu}_\tau)_{1, i_2} = R^{(M)}(\underline{\mu}_\tau)_{9, i_2} = 0$ für alle $i_2 = 0, \dots, 10$ und $R^{(M)}(\underline{\mu}_\tau)_{i_1, 1} = R^{(M)}(\underline{\mu}_\tau)_{i_1, 9} = 0$ für alle $i_1 = 0, \dots, 10$ ist. Auch sonst erscheint die Massenverteilung am Rand von E wenig vertrauenswürdig. So fällt auf, dass $R^{(M)}(\underline{\mu}_\tau)_{0, 5}$ deutlich größer als $R^{(M)}(\underline{\mu}_\tau)_{0, 4}$ ist, obwohl der zugehörige Punkt $(0, 0.5)$ weiter vom Startpunkt x_0 entfernt liegt als der Punkt $(0, 0.4)$.

Benutzt man dessen ungeachtet die gleichen Kriterien für die Wahl von Teilintervallen $E_j^{\mu_\tau}$ von E wie im eindimensionalen Fall (vgl. Seite 43), so erhält man im zweiten Schritt eine Unterteilung in x_1 - und x_2 -Richtung an den Punkten 0.1, 0.3, 0.7 und 0.9. Damit ergeben sich 25 Teilintervalle, die mit $E_{(j_1, j_2)}^{\mu_\tau}$ bezeichnet seien, wobei $j_1, j_2 \leq 5$ ist. Die zugehörigen Teilmaße von μ_τ werden mit $\mu_\tau^{(j_1, j_2)}$ bezeichnet. Einige der Teilintervalle, in denen man keine Masse von μ_τ erwartet, könnten nun wiederum zusammengelegt werden. In Anbetracht des höheren Programmieraufwandes und der Unübersichtlichkeit der Notation soll darauf jedoch verzichtet werden. Eine Unterteilung E_j^μ für das Aufenthaltsmaß erfolgt nicht.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	87.04	0	30.35	98.17	6.725	42.18	25.03	14.39	11.0	0	6.638
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	30.4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.25
3	97.97	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.988
4	7.103	0	0	0	208.6	57.51	39.48	0	0	0	1.8
5	41.65	0	0	0	57.78	11.46	3.189	0	0	0	0
6	25.57	0	0	0	39.11	3.902	5.339	0	0	0	1.473
7	14.02	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.8893
8	11.13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1529
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	6.625	0	0.1854	4.177	1.584	0	1.672	0.6817	0.2264	0	0.6169

Tabelle 1.35: Rücktransformation für μ_τ bei $M = 10$ (multipliziert mit 10^3)

Das verfeinerte lineare Programm wächst mit der Zahl der Teilintervalle $E_{(j_1, j_2)}^{\mu_\tau}$ erheblich, zumal nun wiederum die Transformationsgleichungen für die Momente der auf $[0, 1]^2$ transformierten Teilmaße $\tilde{\mu}_\tau^{(j_1, j_2)}$ analog zu Gleichung (1.55) hinzukommen. Damit sinkt die Ordnung M der Hausdorffbedingungen, für die das resultierende lineare Programm noch mit einer vertretbaren Rechenzeit (unter zwei Stunden) gelöst wird, weiter. Für einige Ordnungen M sind in der nachfolgenden Tabelle 1.36 die Zielfunktionswerte des verfeinerten linearen Programmes angegeben.

M	Zielfunktionswert
5	2.5372
6	2.4806
7	2.3816
8	2.3282

Tabelle 1.36: Numerische Resultate für $x_0 = (0.3, 0.3)$ im zweiten Schritt für Unterteilung bei 0.1, 0.3, 0.7 und 0.9

Für vergleichbare Ordnungen M ist eine Verbesserung des Zielfunktionswertes gegenüber dem ursprünglichen linearen Programm festzustellen. Auch die Massenverteilung auf die Teilmaße $\mu_\tau^{(j_1, j_2)}$ entspricht den Erwartungen wie die nachfolgende Tabelle 1.37 für $M = 8$ zeigt.

	1	2	3	4	5
1	0.03875	0.1739	0.0573	0	0.003153
2	0.1754	0	0	0	0.001355
3	0.05785	0	0.478	0	0.004509
4	0	0	0	0	0
5	0.002872	0.002841	0.00408	0.00408	0

Tabelle 1.37: Massenverteilung auf die Teilmaße $\mu_\tau^{(j_1, j_2)}$ bei $M = 8$ im zweiten Schritt

Wendet man nun wiederum die Rücktransformation auf die Ergebnisse $\tilde{\mu}_{\tau, i_1, i_2}^{(j_1, j_2)}$ von Teilmaßen an, die am Rand von E liegen, so stellt man fest, dass wiederum nur Masse auf Punkte gelegt wird, die direkt auf dem Rand von E liegen. Die Werte selbst sind dabei allerdings ähnlich unbefriedigend wie im ersten Schritt. Von großem Interesse ist insbesondere die Rücktransformation für das Maß $\tilde{\mu}_{\tau}^{(3,3)}$. Sie ist in der nachfolgenden Tabelle 1.38 angegeben.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0.2553	0	0	0	0	0
3	0	0	0.2227	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabelle 1.38: Rücktransformation für $\tilde{\mu}_{\tau}^{(3,3)}$ bei $M = 8$ im zweiten Schritt

Allein an der Ausgabe in Tabellenform kann man erkennen, dass die Rücktransformation den Anteil des Trägers von μ_{τ} auf dem Intervall $[0.3, 0.7]^2$ kaum wiedergibt. Von Kreisform ist nichts zu erkennen. Die beiden Punkte, denen hier Masse zugeordnet wird, entsprechen den Punkten $(0.4, 0.45)$ und $(0.45, 0.4)$. Die Rücktransformation führt hier zu falschen Erkenntnissen über den Träger von μ_{τ} . Der weitere Ablauf des Verfeinerungsalgorithmus, der in Tabelle 1.39 zusammengefasst ist, verdeutlicht das. Die Teilungspunkte sind dort mit s_i bezeichnet, allerdings wird aus Platzgründen nur die erste Komponente von s_i angegeben, die zweite Komponente stimmt mit dieser überein.

Iteration	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	Ordnung	ZFW
3	0.0	0.0125	0.35	0.5	0.9875	1.0	8	2.2748
4	0.0	0.0015625	0.3875	0.44375	0.9984375	1.0	8	2.2299
5	0.0	0.0002	0.4086	0.4227	0.9998	1.0	8	2.2299

Tabelle 1.39: Zusammenfassung des weiteren Verlaufs der Verfeinerung

Im 5. Schritt springt die Masse wieder aus dem mittleren Intervall heraus (vgl. die nachfolgende Tabelle 1.40), obwohl man sie dort vorher identifiziert hatte. Eine erneute Vergrößerung des mittleren Intervalls führt zu nichts, da man dann wiederum dieses Intervall unzulässig stark verkleinert und damit wieder vor dem gleichen Problem steht. Auch eine Unterteilung an weiteren Punkten hilft nicht, die Masse in der Mitte von E irgendwie klar zuzuordnen.

Das Hauptproblem liegt offensichtlich darin, dass die Ordnungen M , die numerisch noch bewältigt werden, zu gering sind, um insbesondere den Teil des Stoppbereiches, der oben durch die Kugel $B((0.5, 0.5), 0.1527)$ approximiert wurde, sauber zu identifizieren. Das wird insbesondere deutlich im Vergleich mit den Resultaten und verwendeten Ordnungen im eindimensionalen Fall, aber auch mit den Untersuchungen für die Berechnung von mittleren Austrittszeiten in der Arbeit [22], wo der zweidimensionale Wienerprozess eines der Beispiele ist.

	1	2	3	4	5
1	0.04736	0.1736	0	0.04924	0.001788
2	0.1736	0	0	0.2473	0.004349
3	0	0	0	0	0
4	0.04924	0.2473	0	0	0
5	0.001788	0.004349	0	0	0

Tabelle 1.40: Massenverteilung auf die Teilmaße $\mu_\tau^{(j_1, j_2)}$ bei $M = 8$ im 5. Schritt

Darüber hinaus führt eine feinere Einschachtelung des Trägers mit Rechtecken bei a priori bekanntem Stoppbereich S zu einer noch größeren Zahl von Teilintervallen $E_{(i,j)}^{\mu_\tau}$. Die resultierenden linearen Programme können dann nur noch für eine sehr kleine Ordnung M (z.B. $M = 4$) überhaupt gelöst werden. Man erhält so ebenfalls nur relativ grobe obere Schranken für $v_1(x_0)$.

Dass die verwendete Ordnung M zu gering ist, wird auch an dem folgenden Beispiel klar. Wählt man eine Unterteilung bei 0.01, 0.33, 0.67 und 0.99, die $B((0.5, 0.5), 0.1527)$ vollständig in ihrem mittleren Intervall $E_{(3,3)}^{\mu_\tau}$ einschliesst, so erhält man für $M = 7$ den Wert 2.3435 als Zielfunktionswert und für $M = 8$ den Wert 2.2979. Eine weitere Erhöhung von M ist wiederum nicht möglich. Dass diese Erhöhung jedoch nötig ist, zeigt sich u.a. an den sehr unterschiedlichen Massenverteilungen auf die Teilmaße $\mu_\tau^{(i,j)}$ für die Ordnungen $M = 7$ und $M = 8$, die in den Tabellen 1.41 und 1.42 angegeben sind.

	1	2	3	4	5
1	0.05748	0.08652	0.1102	0.0315	0
2	0.08652	0	0	0	0.006276
3	0.1102	0	0.4733	0	0.0001121
4	0.0315	0	0	0	0
5	0	0.006276	0.0001121	0	0

Tabelle 1.41: Massenverteilung auf die Teilmaße $\mu_\tau^{(i,j)}$ für $M = 7$ und Unterteilung bei 0.01, 0.33, 0.67 und 0.99

	1	2	3	4	5
1	0.0375	0.16	0.06186	0	0.002892
2	0.16	0	0	0	0.0009662
3	0.06186	0	0.5011	0	0.004959
4	0	0	0	0	0
5	0.002892	0.002445	0.00348	0	0

Tabelle 1.42: Massenverteilung auf die Teilmaße $\mu_\tau^{(i,j)}$ für $M = 8$ und Unterteilung bei 0.01, 0.33, 0.67 und 0.99

Die notwendigen Ordnungen M zur Gewinnung guter oberer Schranken für den Wert $v_1(x_0)$ sind

wegen der rasant anwachsenden Größe der linearen Programme nicht erreichbar. Die Verfeinerung, die es im eindimensionalen Fall ermöglichte, dieses Problem zu umgehen, hilft hier leider nicht in dem gewünschten Ausmaß. Das liegt neben den oben beschriebenen Problemen, verwertbare Informationen aus der Rücktransformation zu gewinnen auch daran, dass die Überdeckung des Trägers des Maßes μ_τ durch Rechtecke in diesem Fall schwierig ist und sich insbesondere für den kreisförmigen Bereich um den Punkt $(0.5, 0.5)$ herum als ungeeignet erweist.

Leider existieren lineare Charakterisierungen dafür, dass eine Doppelfolge $\{\mu_{i,j}\}_{i,j \geq 0}$ eine Folge von Momenten eines Maßes ist, nur für das Einheitsquadrat E und das Einheitsdreieck $D := \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ (vgl. [14]) sowie für einfache lineare Transformationen dieser Gebiete. Die Anwendung anderer möglicher Transformationen in bestimmten Teilbereichen $E' \subset E$ – wie zum Beispiel die sich in diesem Beispiel anbietende Einführung von Polarkoordinaten im mittleren Teil von E – führt dann allerdings u.a. zu Problemen bei der Betrachtung der Differenz $E \setminus E'$.

Für andere Startpunkte x_0 aus dem Fortsetzungsbereich F ergibt sich ein ähnliches Bild. Die Identifizierung des Stoppbereiches S gelingt nur sehr grob und auch die erreichten Zielfunktionswerte im verfeinerten linearen Programm liefern nur relativ ungenaue obere Schranken für den Wert $v_1(x_0)$. Auch führt hier die Einführung weiterer Testfunktionen, ähnlich wie in Abschnitt 1.6.2 für das Cox–Ingersoll–Ross Modell beschrieben, nur zu einer geringfügigen Verbesserung der Zielfunktionswerte. In vielen Fällen nutzt diese Verbesserung allerdings wenig, da aufgrund der größeren Zahl von Variablen und Nebenbedingungen im linearen Programm die Ordnung M abgesenkt werden muss. So ist z.B. der Fall $M = 9$ für das obige Beispiel (vgl. Tabelle 1.45) dann nicht mehr realisierbar.

Eine etwas andere Situation ergibt sich für Startpunkte $x_0 \in S$. Hier ist für Punkte, die nicht in der Nähe des Randes von S liegen (vgl. Abbildung 1.9) eine Eingrenzung des Trägers von μ_τ (und zwar $\{x_0\}$) möglich. Bei einer einmaligen Unterteilung von E in beiden Richtungen am Startpunkt x_0 nimmt die Zielfunktion den Wert $G(x_0)$ an und die volle Masse von 1 wird bei der Rücktransformation auf x_0 abgebildet. Mit diesem Ansatz gelingt es aber nicht, den Stoppbereich vollständig zu identifizieren, da am Rand von S Abweichungen auftreten, die die Schlussfolgerung, dass $x_0 \in S$ gilt, nicht mehr zulassen.

Die folgende Abbildung 1.9 zeigt alle Punkte x_0 für die bei einer Unterteilung von E am Startpunkt x_0 der Zielfunktionswert des verfeinerten linearen Programmes um weniger als $5 \cdot 10^{-5}$ vom Wert $G(x_0)$ abweicht. Dabei ist der Zustandsraum E im Abstand von 10^{-2} in beiden Richtungen durchmustert worden und die linearen Programme wurden mit der Ordnung $M = 8$ gelöst. Zusätzlich ist der Rand der Kugel $B((0.5, 0.5), 0.1527)$ eingezeichnet (vgl. Abschnitt 1.8.1), um die Abweichungen zu verdeutlichen. Offensichtlich wird nur ein Teil des Stoppbereiches durch den LP-Ansatz auf diese Weise identifiziert.

1.8.3 Modifikation des Beispiels

Das nachfolgende Beispiel zeigt nun, dass die Probleme, das obige zweidimensionale Stoppproblem zufrieden stellend zu lösen, im Wesentlichen darauf zurückzuführen sind, dass der kreisförmige Rand von F_{x_0} in der Mitte von E nicht hinreichend genau als eine Teilmenge des Trägers von μ_τ identifiziert werden kann.

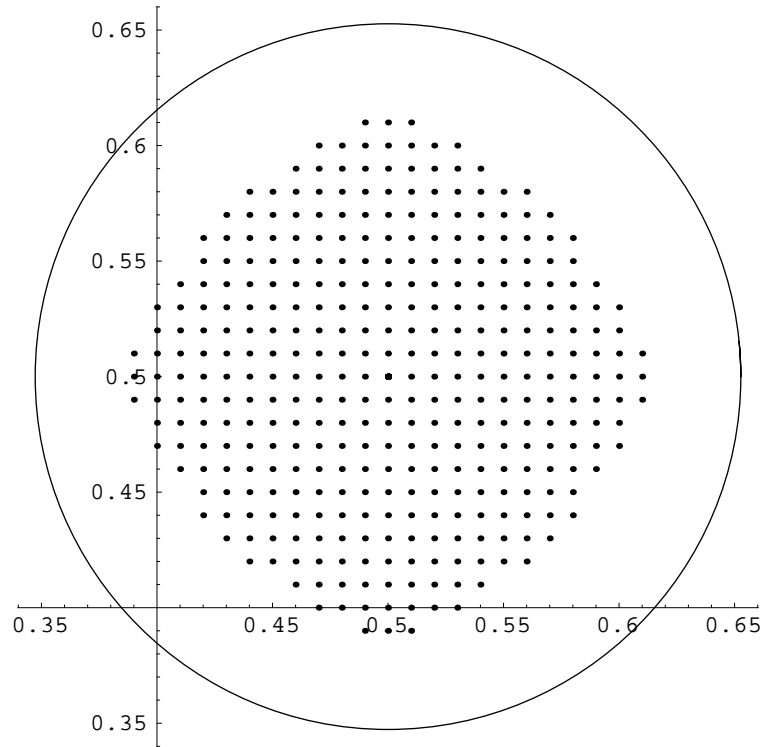


Abbildung 1.9: Die Punkte $x_0 \in E$, die durch den LP-Ansatz als Elemente des Stoppbereiches S identifiziert werden.

Hierfür wird lediglich die Zielgewinnfunktion G zu

$$G(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$$

modifiziert. Dann ist

$$AG(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2 > 0 \quad \text{für } x \neq 0.$$

Somit ist der Stoppbereich S für dieses Beispiel der Rand von E und damit für den Fall des zweidimensionalen Wienerprozesses auch der Träger des Maßes μ_τ .

Das zugehörige Variationsproblem ist damit das folgende Randwertproblem

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}(x) = 0 \quad \text{für } x \in \text{int } E \quad \text{und}$$

$$v_1(x) = G(x) \quad \text{für } x \in \partial E,$$

das sich leicht mit der PDE-Toolbox lösen lässt. Man erhält bei einmaliger Verfeinerung des Gitters, nach der $x_0 = (0.3, 0.3)$ wiederum kein Gitterpunkt ist, den Wert 0.0507395 als Näherung für $v_1(x_0)$.

Mit dem LP-Ansatz gelingt es hier im Gegensatz zum vorherigen Beispiel, den Träger von μ_τ im Zuge der Verfeinerung korrekt einzugrenzen. In jedem Schritt wird die Masse des Stoppmaßes auf die Randintervalle gelegt und bei der Rücktransformation wird Masse nur zu Punkten zugeordnet, die direkt auf dem Rand ∂E von E liegen. Die Werte, die diesen Massenpunkten jedoch zugeordnet werden, sind ähnlich ungenau wie vor Tabelle 1.35 beschrieben. Bemerkenswert ist hier, dass die weitere Identifizierung des Trägers von μ_τ ab dem 2. Schritt keine weitere Veränderung des Zielfunktionswertes mehr mit sich bringt. Die weiteren Schritte sind in Tabelle 1.43 zusammengefasst. Wie in Tabelle 1.39 ist nur die erste Komponente der Teilungspunkte s_i angegeben. Die Massenverteilung auf die Teilintervalle nach dem 5. Schritt findet man in Tabelle 1.44.

Iteration	s_1	s_2	s_3	s_4	Ordnung	ZFW
1	0.0	1.0	–	–	10	0.05123
2	0.0	0.1	0.9	1.0	8	0.0517
3	0.0	0.0125	0.9875	1.0	8	0.05185
4	0.0	0.0015625	0.9984375	1.0	8	0.05188
5	0.0	0.0002	0.9998	1.0	8	0.05186

Tabelle 1.43: Zusammenfassung des Verlaufs der Verfeinerung

	1	2	3
1	0	0.451	0.03319
2	0.3171	0	0.07357
3	0.03327	0.07355	0.01828

Tabelle 1.44: Massenverteilung auf die Teilmaße $\mu_\tau^{(i,j)}$ im 5. Schritt für $M = 8$

Für die Ordnung $M = 9$ erhält man im 5. Schritt den Wert 0.05146 als optimalen Zielfunktionswert. Allerdings benötigt man hier auf einer SUN Ultra 60 bereits ca. 146 Minuten CPU-Zeit. Die zugehörige Massenverteilung findet man in Tabelle 1.45. Die Rechnung für $M = 10$ wurde nach einem Tag abgebrochen.

	1	2	3
1	0.1195	0.3277	0.0279
2	0.3277	0	0.07694
3	0.0279	0.07694	0.01533

Tabelle 1.45: Massenverteilung auf die Teilmaße $\mu_\tau^{(i,j)}$ im 5. Schritt für $M = 9$

Insgesamt erreicht man eine deutlich bessere Näherung für $v_1(x_0)$ als im vorherigen Beispiel. Der Vergleich der Tabellen 1.44 und 1.45 zeigt jedoch, dass das Stabilitätsverhalten für die realisierbaren Ordnungen M noch nicht befriedigend ist.

Da in diesem Beispiel der Stoppbereich S mit dem Rand ∂E von E zusammenfällt, handelt es sich hier gleichzeitig um das Austrittsproblem für den Wienerprozess aus E . Damit besteht für

dieses Beispiel auch die Möglichkeit, neben dem Zielfunktionswert auch die Güte der berechneten mittleren Zeit $\mu_{1,1}$ bis zum Stoppen des Prozesses \mathfrak{X} zu überprüfen und mit der in [22] beobachteten Genauigkeit zu vergleichen.

Für die mittlere Austrittszeit $\mathbf{E}L_E^{x_0}$ für einen Startpunkt $x_0 = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in E = [0, 1]^2$ gilt

$$\mathbf{E}L_E^{x_0} = \frac{32}{\pi^4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{((2i-1)^2 + (2j-1)^2)^{-1}}{(2i-1)(2j-1)} \sin((2i-1)\pi\tilde{x}_1) \sin((2j-1)\pi\tilde{x}_2)$$

(vgl. [28] S.71 bzw. korrigiert in [22]). Die Vergleichswerte in der nachfolgenden Tabelle 1.46 wurden mit der oberen Grenze von 100 in beiden Summen berechnet und stimmen auf alle ausgegebenen Stellen mit den Werten überein, die man bei einer oberen Grenze von 1000 erhält.

Die Tabelle 1.46 zeigt für die Ordnung $M = 9$ für verschiedene Startpunkte $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ den Zielfunktionswert des linearen Programmes, das Resultat, das man mit der PDE-Toolbox für das Randwertproblem erhält, den Wert der Variablen $\mu_{1,1}$ sowie den oben beschriebenen Vergleichswert. Die Teilungspunkte s_i entsprechen dabei den Werten des 5. Schrittes aus Tabelle 1.43 und werden für alle angegebenen Startwerte auch so durch den Verfeinerungsalgorithmus ermittelt.

\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	ZFW	PDE	$\mu_{1,1}$	Vergleichswert
0.3	0.3	0.051462	0.0507395	0.111252	0.109682
0.4	0.3	0.0687489	0.0677986	0.12353	0.122597
0.2	0.8	0.0719414	0.0692276	0.0716313	0.0692939
0.5	0.5	0.149172	0.14726	0.148876	0.147343
0.1	0.9	0.0283949	0.0262218	0.0283789	0.0261428
0.9	0.9	0.691118	0.686256	0.0283826	0.0261428

Tabelle 1.46: Zielfunktionswert und mittlere Austrittszeiten für verschiedene Startwerte x_0 und die Ordnung $M = 9$

Die Güte der Approximation von $\mu_{1,1}$ ist vergleichbar mit der, die man bei der Berechnung der mittleren Austrittszeit aus E für dieses Beispiel in [22] erhält. Die Werte für $\mu_{1,1}$ liegen für die übereinstimmenden Startwerte (0.5, 0.5) und (0.2, 0.8) jedoch außerhalb der in Tabelle 10 in [22] angegebenen Schranken. Die geringfügig schlechteren Werte sind hier allerdings auf die kleinere realisierbare Ordnung $M = 9$ im Vergleich zu $M = 11$ in [22] zurückzuführen. In jedem Fall sind die Ergebnisse jedoch deutlich besser als für das Beispiel im letzten Abschnitt.

1.9 Schlussbemerkungen zu Stoppproblemen

Gestützt auf weitere Beispiele für zweidimensionale Stoppprobleme lässt sich feststellen, dass der LP-Ansatz keine ausreichend genauen Lösungen ermittelt. Die Verfeinerung liefert zwar wie im eindimensionalen Fall eine signifikante Verbesserung, jedoch sind auch dann die Ergebnisse oft noch zu ungenau. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn sich der Träger des Stoppmaßes μ_τ nur ungenau identifizieren lässt.

Dieses Problem wird sich auch nicht beheben lassen, wenn durch eine angepasstere numerische

Behandlung des linearen Programmes, z.B. durch die geschicktere Ausnutzung der ganz spezifischen Form der Nebenbedingungen, insbesondere der Hausdorffbedingungen, oder durch verbesserte rechentechnische Möglichkeiten die realisierbaren Ordnungen M erhöht werden können. Im eindimensionalen Fall, in dem der vorgeschlagene Ansatz sehr gut funktioniert, ist sehr deutlich erkennbar, wie genau der Träger von μ_τ wirklich identifiziert werden muss, um gute Ergebnisse zu erhalten. Gleichzeitig muss man im Auge behalten, dass das Stabilitätsverhalten mit zunehmender Ordnung M und kleineren Teilintervallen deutlich schlechter wird.

Es scheint eher Erfolg zu versprechen, den Stoppbereich S , wie am Ende des letzten Abschnittes beschrieben, zu identifizieren und dort zu versuchen, eine höhere Genauigkeit zu erreichen. Dabei muss man allerdings beachten, dass man selbst mit der genauen Identifizierung des Stoppbereiches S noch nicht das Stoppproblem gelöst hat, da man v_1 außerhalb von S nicht kennt. Mit der Kenntnis von S lässt sich dann allerdings v_1 als Lösung eines festen Randwertproblems ermitteln.

Ein anderer Ausweg ist natürlich die Diskretisierung des Problems, wie sie in den Arbeiten [9] und [10] verfolgt wird. Hier wären weitere Untersuchungen für das Verhalten bei solchen Grenzfällen interessant, wie sie z.B. im Abschnitt 1.5.1 betrachtet werden. Man sollte sich jedoch darüber im Klaren sein, dass man bei einer Diskretisierung nicht mehr spezifisch den dualen Ansatz (1.5) zur Lösung von Stoppproblemen ausnutzt (vgl. Abschnitt 1.3.2).

Generell ist es möglich, den LP-Ansatz auch auf zeitabhängige Stoppprobleme zu übertragen. Das umfasst sowohl Probleme, in denen die Funktionen G und Q von t abhängig sind, als auch Probleme mit einer zeitabhängigen Dynamik des Prozesses \mathfrak{X} . Als Beispiel lässt sich hier die Ermittlung einer optimalen Stoppregel für die Ausübung einer amerikanischen Option angeben. Dort kommt die Zeitabhängigkeit über den festgelegten Endzeitpunkt für die Laufzeit der Option in das Modell. Bei einer Zeitabhängigkeit des Problems wird ähnlich, wie in Abschnitt 2.3.1 für ein Steuerungsproblem beschrieben, vorgegangen. Entscheidend ist, dass man zusätzlich im Zustandsraum E eine Zeitkomponente berücksichtigt und dem infinitesimalen Operator einen Summanden der Form $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ hinzufügt. Damit erhält man wenigstens zweidimensionale Probleme. Eine zeitabhängige Stoppregel wird damit für die Identifizierung des Trägers von μ_τ im Allgemeinen zu ähnlichen Schwierigkeiten führen, wie im Abschnitt 1.8.2 beschrieben. Die Resultate im Abschnitt 2.3.2 bestätigen das indirekt.

Einen grundsätzlich anderen Ansatz für die Approximation des Momentenraumes \mathcal{M}_∞ liefert die Tatsache, dass \mathcal{M}_∞ die konvexe Hülle der Menge von Folgen $\{(1, t, t^2, t^3, \dots) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ ist. Daraus leitet sich nun die Möglichkeit ab, den Momentenraum \mathcal{M}_n der Ordnung n von innen durch ein so genanntes zyklisches Polytop zu approximieren. Dabei wird eine endliche Menge $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\} \subset [0, 1]$ betrachtet. Die konvexe Hülle der Menge $\{(1, t_i, t_i^2, \dots, t_i^n) \mid t_i \in T\}$ heißt dann zyklisches Polytop der Dimension $n+1$ mit der Basispunktmenge T (vgl. z.B. [51]). Im Gegensatz zum Hausdorffpolytop kennt man hier zunächst die Koordinaten der Eckpunkte des Polytops und muss die zugehörigen linearen Nebenbedingungen ermitteln. Dafür stehen jedoch geeignete Algorithmen und Software, wie das Programm PORTA [11], zur Verfügung. Die wichtigste Frage ist insgesamt die Wahl der Punkte t_1, \dots, t_m .

Eine wesentliche Voraussetzung für das Funktionieren des linearen Programmierungsansatzes ist die Beschränktheit des Zustandsraumes E . Nur in diesem Fall existieren mit den Hausdorffbedingungen lineare Charakterisierungen dafür, dass eine Folge eine Momentenfolge ist. Für eindimensionale Probleme existieren für den Fall $E = [0, \infty)$ (Stieltjesches Momentenproblem) und den Fall $E = \mathbb{R}$ (Hamburger Momentenproblem) ebenfalls Charakterisierungen für Momentenfolgen. Für das Hamburger Momentenproblem ist die Bedingung, dass die sogenann-

te Hankel-Matrix $[\mu_{i+j}]_{i,j \geq 0}$ positiv semidefinit ist, hinreichend und notwendig dafür, dass die Folge $\{\mu_i\}_{i \geq 0}$ eine Folge von Momenten einer Verteilung auf \mathbb{R} ist. Für das Stieltjesche Momentenproblem muss zusätzlich noch die Matrix $[\mu_{i+j+1}]_{i,j \geq 0}$ positiv semidefinit sein (vgl. z.B. [45]).

Auch für die Zustandsräume $E = \mathbb{R}$ und $E = [0, \infty)$ kann das duale Problem (1.5) für das Stoppproblem formuliert werden. Man erhält dann ein unendlichdimensionales semidefinites Programm mit den Momenten von μ und μ_τ als Variablen. In diesem Zusammenhang tritt allerdings das Problem auf, dass nicht mehr in jedem Fall die Verteilungen eindeutig durch die Folge der Momente bestimmt sind (vgl. [18]). Darüber hinaus lassen sich die obigen Charakterisierungen für das Hamburger und Stieltjesche Momentenproblem nicht mehr so einfach auf höhere Dimensionen übertragen wie für das Hausdorffsche Momentenproblem (vgl. [7]).

Kapitel 2

Die Anwendung des LP-Ansatzes auf Steuerungsprobleme

2.1 Einführung

Stochastische Steuerungsprobleme spielen in vielen technischen, wirtschafts- und naturwissenschaftlichen Anwendungen eine wichtige Rolle und werden seit vielen Jahren untersucht. Es existiert eine große Anzahl an Klassen von Steuerungsproblemen. Auch Stoppprobleme lassen sich als stochastische Steuerungsprobleme auffassen. Im Weiteren soll es um die Steuerung stetiger stochastischer Prozesse in stetiger Zeit gehen, wobei es sich ausschließlich um Diffusionsprozesse handeln wird. Einen guten Überblick über stochastische Steuerungsprobleme geben das Buch von Fleming und Rishel [19] oder die Arbeit von Bensoussan [6].

Für die Steuerung von Diffusionsprozessen ist eine umfangreiche Theorie entwickelt worden (vgl. z.B. Krylov [31] oder Lions [36]). Der klassische Ansatz zur Lösung solcher Probleme ist die Formulierung der Hamilton–Jacobi–Bellmann Gleichung für die Wertfunktion v , die auf dem Bellmanschen Optimalitätsprinzip beruht. Aus einer Lösung für diese Gleichung wird eine optimale Steuerung für das Steuerungsproblem abgeleitet. Diesen Ansatz könnte man ähnlich wie bei Stopproblemen als primalen Ansatz auffassen.

Ähnlich wie für Stoppprobleme ist man oft nicht in der Lage, die Hamilton–Jacobi–Bellmann Gleichung analytisch zu lösen. Deshalb sind in der Vergangenheit unterschiedliche numerische Verfahren zur Lösung dieser Gleichung vorgeschlagen worden. Darüber hinaus existieren verschiedene Diskretisierungsansätze zur numerischen Lösung von Steuerungsproblemen. Dabei wird das Problem in ein diskretes stochastisches dynamisches Programm überführt und dann mit den dort verfügbaren Verfahren (z.B. Wertiteration) gelöst. Für solche Diskretisierungsansätze gelten nun wiederum Konvergenzaussagen in Bezug auf das stetige Problem. Eine umfassende Darstellung dazu kann man z.B. im Buch von Kushner und Dupuis [35] finden.

Im Gegensatz zur dualen Formulierung (1.5) für das Stoppproblem (1.3) und dem darauf aufbauenden linearen Programmierungsansatz, sind entsprechende Ansätze für verschiedene Steuerungsprobleme bereits seit längerer Zeit bekannt und eingehend untersucht worden. Für die Steuerung Markovscher Ketten geht dieser Ansatz auf Manne [37] sowie Wolfe und Dantzig [50] zurück. Die Übertragung auf Steuerungsprobleme für stetige Prozesse erfolgte durch Kurtz [33] und Stockbridge [46].

Der lineare Programmierungsansatz, der hier vorgestellt werden soll, basiert auf der Martingalformulierung für Steuerungsprobleme und den in den Arbeiten von Kurtz und Stockbridge [34] sowie Bhatt und Borkar [8] bewiesenen Existenzaussagen für relaxierte schwache Lösungen von Steuerungsproblemen. Die Grundidee ist es, zu einem gegebenen Steuerungsproblem mit einem Steuerungsraum \mathcal{U} für eine Steuerung $\{u_t\}_{t \geq 0}$ und einen stochastischen Prozess $\mathfrak{X} = \{X_t\}_{t \geq 0}$ in stetiger Zeit mit Anfangsverteilung ν_0 auf einem Zustandsraum E das Steuerungsproblem als Martingalproblem zu formulieren, d.h. zu verlangen, dass

$$M_t^f := f(X_t) - \int_0^t Af(X_s, u_s) ds \quad (2.1)$$

ein Martingal für alle $f \in \mathcal{D}(A)$ ist. Dabei ist $A : \mathcal{D}(A) \subset \bar{C}_b(E) \rightarrow C(E \times \mathcal{U})$ der infinitesimale Operator für das Steuerungsproblem (vgl. [34]) und $\bar{C}_b(E)$ die Menge aller stetigen Funktionen auf E , die im Unendlichen verschwinden. Insbesondere ist für ein festes $\hat{u} \in \mathcal{U}$ der Operator $A^{\hat{u}}$ mit $\mathcal{D}(A^{\hat{u}}) = \mathcal{D}(A)$ und $A^{\hat{u}}f(x) = Af(x, \hat{u})$ der infinitesimale Operator des mit $u(x) \equiv \hat{u}$ gesteuerten Prozesses, wobei allerdings vorausgesetzt werden muss, dass die Steuerung $\hat{u} \in \mathcal{U}$ für alle $x \in E$ zulässig ist. In den weiteren Beispielen wird das Anfangsmaß ν_0 stets ein Dirac-Maß δ_{x_0} sein.

Für ein stationäres Problem ohne Absorption oder Stoppen, wie dem nachfolgenden Beneš–Hilborn Problem, führt die Martingaleigenschaft (2.1) zu der Gleichungsbedingung

$$\int_{E \times \mathcal{U}} Af(x, u) \mu(dx, du) = 0 \quad \text{für alle } f \in \mathcal{D}(A), \quad (2.2)$$

wobei das Maß $\mu \in \mathcal{P}(E \times \mathcal{U})$ das stationäre Aufenthaltsmaß des Prozesses ist, der den Zustand und die Steuerung als Komponenten enthält (vgl. [34]).

Im Fall einer Absorption am Rand von E (vgl. das Portfolioproblem in Abschnitt 2.3) spielt auch der erste Summand in (2.1) eine Rolle. Als Bedingungen ergeben sich hier

$$\int_E f(x) \nu_0(dx) + \int_{\text{int} E \times \mathcal{U}} Af(x, u) \mu(dx, du) = \int_{\partial E} f(x) \mu_1(dx) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{D}(A), \quad (2.3)$$

wobei μ_1 das Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Rand ∂E zum Zeitpunkt der Absorption ist. Das Maß μ ist das Aufenthaltsmaß des gesteuerten Prozesses auf $\text{int} E \times \mathcal{U}$. Die Analogie von Bedingung (2.3) zur verwandten Beziehung bei Austrittsproblemen (vgl. [22] Gleichung (9)) ist offensichtlich, da lediglich im zweiten Summanden auf der linken Seite von (2.3) noch eine Steuerungskomponente u hinzukommt, die die Steuerung des Prozesses vor seiner Absorption beschreibt.

Neben der durch die Gleichungen (2.2) bzw. (2.3) beschriebenen Dynamik des Steuerungsproblems muss, je nach Problemklasse des Steuerungsproblems, die Zielfunktion des Problems formuliert werden. In dieser Arbeit sollen sich die Steuerungsprobleme auf die vier in [34] angegebenen Problemklassen beschränken (erwartete diskontierte Kosten, erwartete Kosten bis zu einem endlichen Zeitpunkt T , erwartete Durchschnittskosten, erwartete Kosten bis zum Verlassen einer bestimmten Teilmenge $E_0 \subset E$). Die resultierenden Zielfunktionen sind in [34] in den Ausdrücken (1.4) bis (1.7) angegeben.

Für ein Maß μ auf $E \times \mathcal{U}$ bzw. $\text{int}E \times \mathcal{U}$, das die Gleichungen (2.2) bzw. (2.3) erfüllt und das das Minimum für eines der oben genannten Zielkriterien realisiert, kann nun die Randverteilung μ_0 bzgl. x , d.h. $\mu_0(B) := \mu(B \times \mathcal{U})$ für alle Borelmengen $B \in E$ und die bedingte Verteilung η von u bei gegebenem $x \in E$ gebildet werden, d.h.

$$\mu(B_1 \times B_2) = \int_{B_1} \eta(x, B_2) \mu_0(dx)$$

für alle Borelmengen $B_1 \subset E$ und $B_2 \subset \mathcal{U}$.

Entscheidend ist nun, dass der Prozess $\{X_t, \eta(X_t)\}_{t \geq 0}$, der Werte in $E \times \mathcal{P}(\mathcal{U})$ annehmen kann, eine relaxierte schwache Lösung für das Steuerungsproblem als Martingalproblem ist. Das bedeutet, dass eine Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ existiert, so dass der Prozess $\{X_t, \eta(X_t)\}_{t \geq 0}$ \mathcal{F}_t -progressiv messbar ist und der Prozess

$$\tilde{M}_t^f := f(X_t) - \int_0^t \int_{\mathcal{U}} Af(X_s, u) \eta(X_s)(du) ds$$

ein \mathcal{F}_t -Martingal für alle $f \in \mathcal{D}(A)$ ist (vgl. [34]). Die resultierende Steuerung ist dann die Markovsche Steuerung, die im Zustand $x \in E$ eine zufällige Steuerung gemäß $\eta(x, \cdot)$ realisiert. Für den Fall, dass für alle $x \in E$ das bedingte Maß $\eta(x, \cdot)$ ein Diracmaß $\delta_{\tilde{u}(x)}$ für ein $\tilde{u}(x) \in \mathcal{U}$ ist, erhält man die stationäre deterministische Steuerung $\tilde{u} : E \rightarrow \mathcal{U}$ als optimale Steuerung.

Probleme mit zeitabhängiger Steuerung, wie Steuerungsprobleme mit einem festen Endzeitpunkt T , lassen sich entweder über eine zusätzliche Zeitkomponente für den Zustandsraum E und den Operator A oder gemäß der Gleichung (4.25) in [34] formulieren. Für das Beispiel in Abschnitt 2.3 wird der erste Weg gewählt.

Im Gegensatz zur Arbeit von Helmes und Stockbridge [23], wo der LP-Ansatz zur Verifikation der Optimalität einer gegebenen Steuerung genutzt wird, soll hier versucht werden, die optimale Steuerung mit dem LP-Ansatz selbst zu ermitteln. Dabei soll versucht werden, den Algorithmus aus Kapitel 1 zu übertragen. Im Vordergrund steht dabei insbesondere die Identifizierung des Trägers eines Maßes μ , das die Gleichungen (2.2) oder (2.3) erfüllt und gleichzeitig optimal bzgl. eines der oben angegebenen Zielkriterien ist. Mit dieser Information sollen dann Rückschlüsse auf das bedingte Maß η und damit auf eine optimale Steuerung u^* gezogen werden.

Es handelt sich damit um einen Algorithmus, der auf der Martingalformulierung für Steuerungsprobleme aufbaut. Der einzige weitere numerische Ansatz, der in der Literatur dazu bekannt ist, ist der Diskretisierungsansatz in der Arbeit von Mendiondo und Stockbridge [39]. Allerdings lässt sich hier ähnlich wie für den Ansatz für Stoppprobleme in der Arbeit von Cho und Stockbridge [10] (vgl. Abschnitt 1.3.2) zeigen, dass die resultierenden linearen Programme äquivalent zu denen sind, die man erhält, wenn man das Steuerungsproblem diskretisiert und dann den LP-Ansatz für stochastische dynamische Programme nutzt. Sehr gut kann man das für das in [39] auf Seite 1465 angegebene lineare Programm für das modifizierte Beneš-Hilborn Problem erkennen.

Die Erfahrungen für Stoppprobleme legen die Vermutung nahe, dass die Identifizierung des Trägers von μ nicht in jedem Fall gelingen wird, da es sich dabei mindestens um ein zweidimensionales Maß handelt. Die beiden nachfolgenden Abschnitte demonstrieren das. Während für

das in [23] betrachtete Beneš–Hilborn Problem die optimale Steuerung relativ gut identifiziert werden kann, gelingt dies für das anschließende Problem der Portfoliooptimierung nicht.

Wegen der großen Vielfalt von Steuerungsproblemen soll hier, im Gegensatz zur Vorgehensweise in Kapitel 1 bei Stoppproblemen, darauf verzichtet werden, genaue Voraussetzungen dafür anzugeben, wann sich für ein Steuerungsproblem ein Operator A und eine Martingalformulierung (2.1) finden lassen und wann sich diese geeignet in ein äquivalentes unendlichdimensionales lineares Programm in den Momenten von μ auf $E \times \mathcal{U}$ überführen lässt. Dies erscheint auch aufgrund der verschiedenen möglichen Zielfunktionen, Transformationen sowie Rand- und Teilmaße als sehr aufwändig. Es wird im Wesentlichen darauf ankommen, jeweils für ein konkretes Steuerungsproblem zu überprüfen, ob ein solches lineares Programm aufgestellt werden kann. In den nächsten beiden Abschnitten wird dafür je ein Beispiel betrachtet. Als Testfunktionen in (2.1) werden dabei im Allgemeinen wieder die Monome verwendet.

2.2 Das Beneš–Hilborn Problem

2.2.1 Einleitung und Modell

In diesem Abschnitt soll ein erstes Steuerungsproblem behandelt werden. Dieses Problem geht auf das sogenannte Verfolgerproblem von V. E. Beneš zurück und wird z.B. in der Arbeit von Beneš, Shepp und Witsenhausen [5] beschrieben. Es geht darum, ein sich zufällig bewegendes Objekt zu verfolgen. Das Objekt bewegt sich dabei gemäß eines Standard-Wienerprozesses. Der Verfolger kann sich jedoch nur mit einer beschränkten Geschwindigkeit bewegen. Es geht nun darum, den erwarteten aufintegrierten und abdiskontierten quadratischen Abstand zwischen dem Objekt und dem Verfolger zu minimieren. Die Lösung für dieses Problem wird in [5] angegeben und besteht aus einer sogenannten „Bang-Bang“ Steuerung, d.h. je nach Lage des Verfolgers zum Objekt wird entweder mit der maximalen positiven Geschwindigkeit bzw. der minimalen negativen Geschwindigkeit dem Objekt gefolgt.

Dieses Problem wird in verschiedenen Variationen in der Literatur untersucht, genannt seien hier die Arbeiten von Beneš [4], Clark und Davis [13] oder Christopeit und Helmes [12]. Dabei werden mit verschiedenen Lösungstechniken für stochastische Steuerungsprobleme, wie z.B. der Lösung der Hamilton–Jacobi–Bellman Gleichung oder der Nutzung von Diskretisierungsansätzen, jeweils optimale Steuerungen in der Gestalt von „Bang-Bang“ Steuerungen verifiziert.

Hier soll eine Version betrachtet werden, für die neben dem Steuerungsraum \mathcal{U} auch der Zustandsraum E beschränkt ist und die in den Arbeiten von Helmes und Stockbridge [23] sowie Mendiondo und Stockbridge [39] untersucht wird. Der Prozess X_t entwickelt sich auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ gemäß der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = u_t dt + \sigma dW_t, \tag{2.4}$$

wobei $\sigma > 0$ und $u_t \in \mathcal{U} = [-1, 1]$ die Steuerung ist. Erreicht der Prozess X_t in 1 oder -1 den Rand von $(-1, 1)$, so wird er für eine, mit dem Parameter λ exponentialverteilte Zeit, in diesen Punkten festgehalten und dann in den Punkt 0 zurückgesetzt. Damit erhält man $E = [-1, 1]$ als Zustandsraum. Der Prozess X_t entspricht dem Abstand zum Objekt im Verfolgerproblem und wird durch die obige Konstruktion beschränkt. Als Zielkriterium wird das Durchschnitts-

kostenkriterium betrachtet, d.h. es soll die Größe

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \frac{1}{t} \int_0^t X_t^2 dt \quad (2.5)$$

minimiert werden. Der obige abdiskontierte Fall läßt sich darauf zurückführen (vgl. [23] Abschnitt 6).

Zu diesem Steuerungsproblem gehört nun der folgende Operator $A : C^2(E) \longrightarrow B(E \times \mathcal{U})$

$$Af(x, u) = \begin{cases} uf'(x) + \frac{\sigma^2}{2} f''(x) & \text{für } -1 < x < 1 \\ \lambda(f(0) - f(-1)) & \text{für } x = -1 \\ \lambda(f(0) - f(1)) & \text{für } x = 1, \end{cases} \quad (2.6)$$

wobei $B(E \times \mathcal{U})$ die Menge aller beschränkten Funktionen auf $E \times \mathcal{U}$ ist.

Insgesamt erhält man für den Operator A zusammen mit der Zielfunktion (2.5) und den Gleichungen (2.2) das folgende äquivalente Optimierungsproblem (2.7) auf dem Raum $\mathcal{P}(E \times \mathcal{U})$ der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $E \times \mathcal{U}$

$$\min_{E \times \mathcal{U}} \int x^2 \mu(dx, du) \quad (2.7)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\int_{E \times \mathcal{U}} \left\{ \left(uf'(x) + \frac{\sigma^2}{2} f''(x) \right) \mathbb{1}_{(-1,1)}(x) + \lambda(f(0) - f(x)) \mathbb{1}_{\{-1,1\}}(x) \right\} \mu(dx, du) = 0$$

für alle $f \in \mathcal{D}(A)$ (wegen der Zielfunktion vgl. [34]).

In den Randpunkten $x = -1$ und $x = 1$ hat die Steuerung u keinen Einfluss auf den Prozess X_t , gleichzeitig wird das Maß μ dort positive Massenanteile besitzen, da nach dem Erreichen des Randes der Prozess dort im Mittel die Zeit $1/\lambda$ verbringt. Diese Massenanteile sollen mit p_{-1} und p_1 bezeichnet werden und $\tilde{\mu}$ sei das Aufenthaltsmaß des Prozesses auf der Menge $(-1, 1) \times \mathcal{U}$.

Nun könnte man das Maß $\tilde{\mu}$ so transformieren, dass das transformierte Maß seinen Träger auf $(0, 1) \times [0, 1]$ hat und dann die Gleichungsbedingungen im Optimierungsproblem (2.7) in den Momenten dieses Maßes zusammen mit den zweidimensionalen Hausdorffbedingungen formulieren. Auf diese Transformation soll hier verzichtet werden und stattdessen von vornherein der Teilungspunkt $s_2 = (0, 0)$ auf der Menge $(-1, 1) \times \mathcal{U}$ betrachtet werden (vgl. Abschnitt 1.4.2). Damit erhält man die Teilmaße $\mu^{(1,1)}$, $\mu^{(1,2)}$, $\mu^{(2,1)}$ und $\mu^{(2,2)}$ wie in Abschnitt 1.4.2 beschrieben, wobei in der dortigen Notation $s_1 = (-1, -1)$ und $s_3 = (1, 1)$ ist. Für diese vier Maße besteht die Transformation auf das Einheitsquadrat nur noch aus einem geeigneten Vorzeichenwechsel.

Wie für Stoppprobleme kann nun für das Problem (2.7) ein äquivalentes unendlichdimensionales lineares Programm in den Momenten dieser vier Maße formuliert werden. Als weitere Variablen

kommen noch die Massen p_{-1} und p_1 an den Endpunkten hinzu, als Testfunktionen dienen wiederum die Monome $f(x) = x^n$. Es ergibt sich das folgende lineare Programm (2.8)

$$\min \quad \mu_{2,0}^{(1,1)} + \mu_{2,0}^{(1,2)} + \mu_{2,0}^{(2,1)} + \mu_{2,0}^{(2,2)} + p_{-1} + p_1 \quad (2.8)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma^2}{2} n(n-1) \left((-1)^n \mu_{n-2,0}^{(1,1)} + (-1)^n \mu_{n-2,0}^{(1,2)} + \mu_{n-2,0}^{(2,1)} + \mu_{n-2,0}^{(2,2)} \right) + \\ & n \left((-1)^n \mu_{n-1,1}^{(1,1)} + (-1)^{n-1} \mu_{n-1,1}^{(1,2)} - \mu_{n-1,1}^{(2,1)} + \mu_{n-1,1}^{(2,2)} \right) - \lambda(-1)^n p_{-1} - \lambda p_1 = 0 \end{aligned}$$

für alle $n \geq 2$,

$$-\mu_{0,1}^{(1,1)} + \mu_{0,1}^{(1,2)} - \mu_{0,1}^{(2,1)} + \mu_{0,1}^{(2,2)} + \lambda p_{-1} - \lambda p_1 = 0$$

und

$$\mu_{0,0}^{(1,1)} + \mu_{0,0}^{(1,2)} + \mu_{0,0}^{(2,1)} + \mu_{0,0}^{(2,2)} + p_{-1} + p_1 = 1.$$

Die letzte Nebenbedingung leitet sich aus der Bedingung $\mu \in \mathcal{P}(E \times \mathcal{U})$ her. Dazu kommen noch die zweidimensionalen Hausdorffbedingungen für die Maße $\mu^{(1,1)}$, $\mu^{(1,2)}$, $\mu^{(2,1)}$ und $\mu^{(2,2)}$. Für die Variablen p_{-1} und p_1 muss Nichtnegativität gefordert werden.

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass in den Gleichungsnebenbedingungen für die Komponente u nur die ersten beiden Momente auftreten. Die höheren Momente tauchen nur in den Hausdorffbedingungen auf.

Die vorliegende Unterteilung erlaubt es, analog zu den zusätzlichen Testfunktionen für das Cox–Ingersoll–Ross Modell (vgl. Abschnitt 1.6.2) für $n \geq 3$ die folgenden Funktionen zu betrachten

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x^n & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Damit erhält man die zusätzlichen Nebenbedingungen

$$\frac{\sigma^2}{2} n(n-1) \left(\mu_{n-2,0}^{(2,1)} + \mu_{n-2,0}^{(2,2)} \right) + n \left(-\mu_{n-1,1}^{(2,1)} + \mu_{n-1,1}^{(2,2)} \right) + \lambda p_1 = 0.$$

Für die Approximation durch ein endlichdimensionales lineares Programm werden die Gleichungsnebenbedingungen und die Hausdorffbedingungen nur bis zur Ordnung N in der Komponente x und bis zur Ordnung L in der Komponente u berücksichtigt.

2.2.2 Die optimale Steuerung und die numerischen Resultate

Alle Resultate in diesem Abschnitt gelten für den Fall $\sigma = 1$, für den auch alle numerischen Rechnungen durchgeführt wurden.

Für das unbeschränkte Verfolgerproblem ist die stationäre Steuerung

$$u^*(x) = -\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

die optimale Steuerung (vgl. [5]). Diese Steuerung bleibt auch für das modifizierte Verfolgerproblem optimal, solange

$$\lambda \leq \tilde{\lambda} = \frac{3e^2 + 9}{13 - e^2} \approx 5.55471$$

gilt (vgl. [23] Abschnitt 5).

Weiterhin sind in diesem Fall für jede relaxierte Steuerung u die Randverteilung μ_0 auf $(-1, 1)$ sowie die Wahrscheinlichkeiten p_{-1} und p_1 bekannt (vgl. [39] S. 1461). Für die oben angegebene optimale Strategie u^* findet man für wichtige Charakteristiken des gesteuerten Prozesses \mathfrak{X}^* geschlossene Ausdrücke. So ergibt sich für die mittlere Austrittszeit $\mathbf{E} \tau_1$ des gesteuerten Prozesses aus dem Intervall $(-1, 1)$

$$\mathbf{E} \tau_1 = \frac{e^2 - 3}{2} \approx 2.194528. \quad (2.9)$$

Darüber hinaus ist (vgl. [23] Abschnitt 5)

$$\mathbf{E} \int_0^{\tau_1} (X_s^*)^2 ds = \frac{3e^2 - 19}{12} \approx 0.263931. \quad (2.10)$$

Da andererseits die Beziehungen

$$\mathbf{E} \tau_1 = \frac{1 - p_{-1} - p_1}{\lambda(p_{-1} + p_1)} =: \alpha$$

und

$$\mathbf{E} \int_0^{\tau_1} (X_s^*)^2 ds = \frac{\mu_{2,0}^{(1,1)} + \mu_{2,0}^{(1,2)} + \mu_{2,0}^{(2,1)} + \mu_{2,0}^{(2,2)}}{\lambda(p_{-1} + p_1)}$$

gelten (vgl. [23] Gleichungen (3.11) und (3.12)), ist man in der Lage, auch den optimalen Ziel-funktionswert v für das lineare Programm (2.8) zu berechnen. Zusammen mit den Gleichungen

(2.9) und (2.10) erhält man

$$v = \frac{\lambda(3e^2 - 19) + 12}{6\lambda(e^2 - 3 + 2\lambda^{-1})}. \quad (2.11)$$

Dieser Wert dient neben dem obigen Wert α für $\mathbf{E} \tau_1$ als Vergleichsgröße für die numerischen Resultate des linearen Programmes (2.8). Während v von λ abhängt, ist der Vergleichswert α wegen der Beziehung (2.9) für $\lambda \leq \tilde{\lambda}$ unabhängig von λ .

Die nachfolgenden Rechnungen wurden zunächst für $\lambda = 0.2$ durchgeführt, damit ergibt sich ein Zielfunktionswert von 0.731658. In der nachfolgenden Tabelle 2.1 sind nun für verschiedene Ordnungen N und L der Zielfunktionswert, die Massenverteilung auf die vier Teilintervalle, die Wahrscheinlichkeiten p_{-1} und p_1 sowie der Vergleichswert α angegeben.

N	L	ZFW	$\mu_{0,0}^{(1,1)}$	$\mu_{0,0}^{(1,2)}$	$\mu_{0,0}^{(2,1)}$	$\mu_{0,0}^{(2,2)}$	p_{-1}	p_1	α
10	10	0.731657	0	0.175426	0.129601	0	0.31663	0.378342	2.19453
11	11	0.731657	0.062636	0.128434	0.113958	0	0.368239	0.326734	2.19453
13	6	0.731657	0	0.139798	0.16523	0	0.388241	0.306732	2.19453
15	2	0.731657	0.0487075	0.136056	0.120264	0	0.368889	0.326084	2.19453
5	2	0.729358	0	0.111917	0.20001	0	0.409452	0.278621	2.26667

Tabelle 2.1: Zielfunktionswerte und Massenverteilung für $\lambda = 0.2$ und verschiedene Ordnungen N und L

Man kann erkennen, dass der Zielfunktionswert v und der Wert α für $\mathbf{E} \tau_1$ exakt ermittelt werden, nur für sehr kleine Ordnungen N und L ergeben sich Abweichungen (vgl. die letzte Zeile in Tabelle 2.1). Das vorliegende Steuerungsproblem ist bzgl. $x = 0$ symmetrisch, auch die optimale Steuerung u^* und der gesteuerte Prozess \mathfrak{X}^* sind symmetrisch. Daher wären für die Lösungen des linearen Programmes (2.8) u.a. die Gleichheiten $p_{-1} = p_1$, $\mu_{0,0}^{(1,1)} = \mu_{0,0}^{(2,2)}$ und $\mu_{0,0}^{(1,2)} = \mu_{0,0}^{(2,1)}$ zu erwarten. Es sind jedoch z.T. deutliche Abweichungen zu erkennen. Aus den Ergebnissen des linearen Programmes lässt sich die Symmetrieeigenschaft des Problems nicht ablesen. Allerdings wird die Summe $p_{-1} + p_1$ korrekt berechnet. Weiterhin müsste wegen der oben angegebenen optimalen Steuerung u^* die Beziehung $\mu_{0,0}^{(1,1)} = \mu_{0,0}^{(2,2)} = 0$ gelten. Auch dieses Resultat ist nicht für alle Rechnungen zu beobachten.

Interessanterweise haben diese Bedingungen keine Auswirkungen auf den optimalen Zielfunktionswert v . So wurden dem linearen Programm (2.8) noch zusätzlich die Nebenbedingung $p_{-1} = p_1$ hinzugefügt und alle Rechnungen aus Tabelle 2.1 wiederholt. Die Ergebnisse sind in der nachfolgenden Tabelle 2.2 angegeben.

Man kann erkennen, dass sich die Zielfunktionswerte nicht verändern. Eine ähnliche Situation ergibt sich, wenn man nun auch noch die Nebenbedingungen $\mu_{0,0}^{(1,2)} = \mu_{0,0}^{(2,1)}$ und $\mu_{0,0}^{(1,1)} = \mu_{0,0}^{(2,2)} = 0$ hinzufügt.

Einen ähnlichen Effekt hat die Anwendung der Modellierung für das Problem in [23]. Dort wird von vornherein die Symmetrieeigenschaft des Problems ausgenutzt und die Schranke $x = 0$ als reflektierender Rand modelliert. Damit bewegt sich der Prozess \mathfrak{X} nur noch auf dem Zustandsraum $E = [0, 1]$ und man kann die Zahl der Variablen im linearen Programm halbieren. Bei

N	L	ZFW	$\mu_{0,0}^{(1,1)}$	$\mu_{0,0}^{(1,2)}$	$\mu_{0,0}^{(2,1)}$	$\mu_{0,0}^{(2,2)}$	p_{-1}, p_1	α
10	10	0.731657	0	0.119032	0.143382	0.0426136	0.347486	2.19453
11	11	0.731658	0.0104393	0.121196	0.121196	0.0521967	0.347486	2.19453
13	6	0.731658	0	0.155004	0.155004	0	0.347486	2.19453
15	2	0.731658	0.032467	0.144397	0.128163	0	0.347486	2.19453
5	2	0.729358	0	0.0940367	0.0940367	0.123853	0.344037	2.26667

Tabelle 2.2: Zielfunktionswerte und Massenverteilung analog zu Tabelle 2.1 mit der Bedingung $p_{-1} = p_1$

der Modellierung in diesen Abschnitt soll jedoch auf diese zusätzliche Struktureigenschaft verzichtet werden. Die Vorstellung besteht darin, diese Eigenschaft aus der Lösung des linearen Programmes ablesen zu können.

Unabhängig von dieser Fragestellung kann man jetzt natürlich versuchen, mit Hilfe der Rücktransformation Informationen über den Träger von μ zu gewinnen. Insbesondere stellt sich die Frage, ob der Verfeinerungsalgorithmus für Stopp-probleme auch hier durchgeführt werden kann, d.h. ob eine feinere Unterteilung von $E \times \mathcal{U}$ möglich ist. Die beiden nachfolgenden Tabellen 2.3 und 2.4 zeigen das Ergebnis der Rücktransformation $R^{(10,10)}$ für $\mu^{(1,2)}$ und $\mu^{(2,1)}$ mit den Ordnungen $N = 10$ und $L = 10$ ohne zusätzliche Symmetriebedingungen (vgl. die erste Zeile in Tabelle 2.1). Die einzelnen Zeilen in den Tabellen sind dabei der x -Komponente, die Spalten der u -Komponente zuzuordnen.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0.0669643	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0265709
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.015939
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0273546
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0191482
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00854376
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00884889
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.000648115
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00140835

Tabelle 2.3: Rücktransformation $R^{(10,10)}$ angewandt auf das Ergebnis für $\mu^{(1,2)}$ mit $\lambda = 0.2$, $N = 10$ und $L = 10$

Man erkennt, dass für $\mu^{(1,2)}$, d.h. für Werte $x \leq 0$ und $u \geq 0$, abgesehen von $x = 0$, die volle Masse stets bei $u = 1$ zugeordnet wird. Eine ähnliche Situation ergibt sich für das Maß $\mu^{(2,1)}$, hier wird die volle Masse nur bei $u = -1$ zugeordnet. Die Massenzuordnung erfolgt also im Wesentlichen, wie man es in Anbetracht der optimalen Steuerung u^* auch erwarten würde. Nur die Zuordnung für $x = 0$ bei $\mu^{(1,2)}$ weicht davon ab. Zu den Werten selbst muss man aber genau die gleichen Bemerkungen wie für die Werte in Tabelle 1.35 machen. So ist z.B. nicht einzusehen, warum $R^{(10,10)}(\mu^{(1,2)})_{4,10} = 0$ ist, obwohl die Nachbarwerte $R^{(10,10)}(\mu^{(1,2)})_{3,10}$ und

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0317497
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0190455
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0326862
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0228803
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.010209
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0105736
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.000774435
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00168284

Tabelle 2.4: Rücktransformation $R^{(10,10)}$ angewandt auf das Ergebnis für $\mu^{(2,1)}$ mit $\lambda = 0.2$, $N = 10$ und $L = 10$

$R^{(10,10)}(\mu^{(1,2)})_{5,10}$ verschieden von Null sind.

Nun gibt es hier verschiedene Möglichkeiten, anhand der vorliegenden Werte für die Rücktransformation, weitere Unterteilungen von $E \times \mathcal{U}$ vorzunehmen. Bei der Entscheidung empfiehlt es sich, auch die Ergebnisse der Rücktransformation für die anderen Rechnungen aus Tabelle 2.1 zu nutzen. Es wird überall die Masse den Werten $u = 1$ bzw. $u = -1$ zugeordnet, nur für $x = 0$ ergeben sich Abweichungen, hier wird die Masse auf verschiedene Werte von u zugeordnet. Auf diese Weise entstehen auch die Ergebnisse mit $\mu_{0,0}^{(1,1)} \neq 0$ und $\mu_{0,0}^{(2,2)} \neq 0$. In Anbetracht der optimalen Steuerung ist das Verhalten bei $x = 0$ auch nicht verwunderlich, da sich genau dort der Umschaltunkt von u^* befindet.

In Anbetracht der unklaren Situation für $x = 0$ und der deutlichen Zuordnung für alle anderen Werte, bieten sich die folgenden Punkte als Unterteilungspunkte für $E \times \mathcal{U}$ an

$$s_1 = (-1, -1), \quad s_2 = (-0.1, -0.9), \quad s_3 = (0, 0), \quad s_4 = (0.1, 0.9) \quad \text{und} \quad s_5 = (1, 1).$$

Damit erhält man 16 neue Teilmaße $\{\mu^{(i,j)}\}_{1 \leq i,j \leq 4}$ auf $E \times \mathcal{U}$. Es sei aber noch einmal darauf hingewiesen, dass auch andere Unterteilungen denkbar sind.

Im zweiten Schritt erkennt man dann, dass die oben gewählte Unterteilung sehr günstig ist und man den Träger von μ weiter eingrenzen kann. Die weiteren Schritte sind in den Tabellen 2.5 und 2.6 zusammengefasst. Dabei sind in Tabelle 2.5 neben den jeweiligen Ordnungen N und L die Teilungspunkte s_i angegeben. In Tabelle 2.6 stehen die Zielfunktionswerte, die Teilmaße denen eine positive Masse zugeordnet wird mit dem jeweiligen Massenanteil sowie der Vergleichswert α .

Nach dem 4. Schritt erhält man die volle Masse von μ auf den Teilintervallen $(-1, -0.01] \times [0.999, 1]$ und $[0.01, 1) \times [-1, -0.999]$. Sieht man sich die Rücktransformation für die entsprechenden Teilmaße $\mu^{(1,4)}$ und $\mu^{(4,1)}$ an, so stellt man fest, dass für alle x -Werte die volle Masse auf $u = 1$ bzw. $u = -1$ abgebildet wird. Damit kann man nach dem 4. Schritt das bedingte Maß η für alle $x \in (-1, -0.01] \cup [0.01, 1)$ als Punktmaß verifizieren und erhält damit für diese Werte eine stationäre Steuerung $\tilde{u}(x)$. Für $-1 < x \leq -0.01$ erhält man $\tilde{u}(x) = 1$ und für $0.01 \leq x < 1$ den Wert $\tilde{u}(x) = -1$ mit einer Genauigkeit von 10^{-4} . Für $-0.01 < x < 0.01$

Iteration	N	L	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
2	10	10	$(-1, -1)$	$(-0.1, -0.9)$	$(0,0)$	$(0.1, 0.9)$	$(1, 1)$
3	10	10	$(-1, -1)$	$(-0.01, -0.99)$	$(0,0)$	$(0.01, 0.99)$	$(1, 1)$
4	10	10	$(-1, -1)$	$(-0.01, -0.999)$	$(0,0)$	$(0.01, 0.999)$	$(1, 1)$

Tabelle 2.5: Maximale Ordnungen und Teilungspunkte für $E \times \mathcal{U}$ in den weiteren Schritten für $\lambda = 0.2$

It.	ZFW	$\mu_{0,0}^{(1,4)}$	$\mu_{0,0}^{(2,3)}$	$\mu_{0,0}^{(3,2)}$	$\mu_{0,0}^{(4,1)}$	p_{-1}	p_1	α
2	0.731658	0.11511	0.022052	0.034174	0.133691	0.372983	0.321989	2.19453
3	0.731657	0.140043	0	0	0.164985	0.409842	0.285131	2.19453
4	0.731657	0.140043	0	0	0.164985	0.409842	0.285131	2.19453

Tabelle 2.6: Zielfunktionswerte und Massenverteilung in den weiteren Schritten für $\lambda = 0.2$

kann man allerdings keine Aussage über eine Steuerung machen.

Mit der Steuerung \tilde{u} erhält man insgesamt eine gute Approximation für die optimale Steuerung u^* . In der Nähe des Umschaltpunktes $x = 0$ hat man allerdings Schwierigkeiten, die optimale Steuerung zu finden. Weiterhin ist es überraschend, dass die Symmetrieeigenschaft des Problems nicht sauber erkannt wird, obwohl man die Steuerung relativ gut approximiert. Daran ändert sich auch nichts, wenn man ähnlich wie für das Cox–Ingersoll–Ross Modell die Teilungspunkte -0.01 und 0.01 auf der x -Achse nutzt, um noch zusätzliche Testfunktionen einzuführen.

Wie im ersten Schritt in Tabelle 2.2 kann man natürlich auch in den weiteren Schritten wieder zusätzlich die Bedingung $p_{-1} = p_1$ und weitere Symmetriebedingungen fordern. Das hat wiederum keinen Einfluss auf den Zielfunktionswert. Auch der weitere Verlauf der Verfeinerung ändert sich nicht.

Auch für andere Werte $\lambda \leq \tilde{\lambda}$ lässt sich die optimale Steuerung u^* gut identifizieren und der Zielfunktionswert v sowie der Vergleichswert α werden exakt ermittelt. Die Symmetrie des Problems lässt sich jedoch meist nicht verifizieren.

Die Ursache für dieses asymmetrische Verhalten der Lösung des linearen Programmes konnte bisher nicht zufrieden stellend geklärt werden. Ein möglicher Grund könnte jedoch sein, dass die beiden Funktionen

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

nicht als zusätzliche Testfunktionen verwendet werden können, da $f_1, f_2 \notin \mathcal{D}(A) = C^2(E)$ gilt. Gerade solche Testfunktionen niedriger Ordnung wären aber für Symmetrieeigenschaften interessant.

2.3 Ein Beispiel zur Portfoliooptimierung

2.3.1 Das Modell und das resultierende lineare Programm

Wir betrachten das nachfolgende Modell für einen einfachen Finanzmarkt mit einem Bond bzw. Bankguthaben mit einer Wertentwicklung B_t und einem risikobehafteten Wertpapier mit einem Preis P_t pro Stück (vgl. Karatzas [27]). Der Prozess $\{B_t\}_{t \geq 0}$ entwickelt sich bis zu einem festen Zeitpunkt T gemäß der Gleichung

$$dB_t = B_t r_t dt, \quad B_0 = 1, \quad (2.12)$$

wobei r_t die kurzfristige Zinsrate ist (vgl. Abschnitt 1.6). Der Preis P_t des Wertpapiers entwickelt sich bis T gemäß der stochastischen Differentialgleichung

$$dP_t = P_t (b_t dt + \sigma_t dW_t), \quad P_0 = p_0 \in (0, \infty), \quad (2.13)$$

wobei W_t der Standard-Wienerprozess und b_t, σ_t und r_t bezüglich der durch $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ erzeugten σ -Algebra \mathcal{F}_t -progressiv messbare Prozesse sind, die die Bedingung

$$\mathbf{E} \int_0^T (|r_t| + |b_t| + \sigma_t^2) dt < \infty$$

erfüllen.

Im Weiteren interessieren wir uns für einen Portfolioprozess $\{u_t\}_{t \leq T}$ und den zugehörigen Wertprozess $\{X_t\}_{t \leq T}$. Der Portfolioprozess gibt an, welcher Betrag in das risikobehaftete Wertpapier investiert wird. Der verbleibende Teil des Vermögens $X_t - u_t$ zur Zeit t wird in den Bond investiert. Es können sowohl u_t als auch $X_t - u_t$ negativ sein. In diesem Modell wird eine mögliche Konsumtion nicht berücksichtigt.

Ein Portfolioprozess $\{u_t\}_{t \leq T}$ heißt zulässig, wenn er \mathcal{F}_t -progressiv messbar ist und eine Integrationseigenschaft erfüllt (vgl. [27] S. 3). Für das in diesem Abschnitt betrachtete Beispiel wird die Zulässigkeit über eine Eigenschaft des zugehörigen Wertprozesses $\{X_t\}_{t \leq T}$ definiert.

Der zugehörige Wertprozess $\{X_t\}_{t \leq T}$ entwickelt sich dann wie folgt (vgl. (2.12) und (2.13)):

$$\begin{aligned} dX_t &= u_t(b_t dt + \sigma_t dW_t) + (X_t - u_t) r_t dt \\ &= u_t(b_t dt - r_t dt + \sigma_t dW_t) + X_t r_t dt. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Das in diesem Modell handelnde Subjekt ist nun in der Lage, über die Gestaltung des Portfolioprozesses Einfluss auf den Wert X_t des Portfolios zu nehmen. Das Ziel der hier betrachteten Portfoliooptimierung ist es, die Wahrscheinlichkeit, dass der Wertprozess zum Zeitpunkt T einen bestimmten Wert \hat{x} erreicht oder übersteigt, unter der Nebenbedingung, dass der Portfolioprozess u_t zulässig ist, zu maximieren.

Bemerkung: Modelle zur Portfoliooptimierung in stetiger Zeit gehen auf Robert C. Merton zurück (vgl. [40], [41]). Aus diesem Grund wird das obige Optimierungsproblem in der Literatur auch als Mertons Problem bezeichnet (vgl. z.B. Duffie [15] oder Korn [30]).

Im Folgenden soll ein vereinfachtes Beispiel dieses Problems betrachtet werden, für das sowohl die optimale Wertfunktion als auch eine optimale Steuerung u_t bekannt sind und das eine Formulierung des Steuerungsproblems als lineares Programm erlaubt. Es seien $r_t \equiv 0$, $b_t \equiv b$ und $\sigma_t \equiv 1$, wobei $b > 0$ gelte. Der obige Wert \hat{x} , der mit maximaler Wahrscheinlichkeit erreicht werden soll, sei 1.

Das Anfangsvermögen sei $X_0 = x_0$ mit $0 < x_0 < 1$. Für den Wertprozess $\{X_t\}_{t \leq T}$ ist der Punkt 0 ein absorbierender Zustand, d.h. nach dem Erreichen von 0 verbleibt der Prozess dort bis zum Endzeitpunkt T (Bankrott). Erreicht der Wertprozess zu einer Zeit $t' < T$ bereits den Wert 1, so ist das Ziel der Portfoliooptimierung erreicht, da ab diesem Zeitpunkt die Steuerung $u_t \equiv 0$ sichert, dass auch $X_T = 1$ gilt, d.h. ab t' wird nur noch in das unverzinsliche Bankguthaben investiert. Damit kann auch 1 als absorbierender Zustand aufgefasst werden und es genügt, den Wertprozess auf dem Intervall $\mathcal{X} = [0, 1]$ zu betrachten.

Ein Portfolioprocess u_t ist zulässig für das Steuerungsproblem, wenn er \mathcal{F}_t -progressiv messbar ist und der zugehörige Wertprozess X_t die Bedingung $0 \leq X_t \leq 1$ für alle $t \leq T$ erfüllt. Dazu genügt es, wenn

$$\int_0^T u_t^2 dt < \infty$$

fast sicher gilt (vgl. [27] Bemerkung 2.6.1).

Die Steuerung u_t ist zunächst nicht nach oben und unten beschränkt. Für die Formulierung des linearen Programmes wird jedoch Beschränktheit benötigt, um wiederum die Hausdorffbedingungen nutzen zu können. Es wird hier also zunächst $u_t \in [-K, K]$ für alle $t \leq T$ und eine Konstante $K > 0$ gefordert und dann eine Transformation der Steuerung in \tilde{u}_t mit $\tilde{u}_t \in [-1, 1]$ vorgenommen (Division durch K). Mit wachsendem K soll dann das ursprüngliche Steuerungsproblem approximiert werden.

Es wird der Fall $T = 1$ betrachtet, andernfalls muss das Intervall $[0, T]$ auf das Intervall $[0, 1]$ transformiert werden. Damit haben wir insgesamt den Zustandsraum $E = \mathcal{T} \times \mathcal{X}$ und den Steuerungsraum $\mathcal{U} = [-K, K]$, wobei \mathcal{T} das Zeitintervall $[0, T] = [0, 1]$ ist.

Insgesamt erhält man für $u \in \mathcal{U}$ den folgenden infinitesimalen Operator A für das Steuerungsproblem (vgl. (2.14) und die spezielle Gestalt von r_t , b_t und σ_t)

$$Af(t, x, u) = \left(\frac{1}{2} u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) + b u \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right) \mathbb{1}_{[0, T) \times (0, 1)}$$

für alle $(t, x, u) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ und Funktionen f auf $\mathcal{T} \times \mathcal{X}$ mit $f(t, \cdot) \in C^2(\mathcal{X})$ für alle $t \in \mathcal{T}$ und $f(\cdot, x) \in C^1(\mathcal{T})$ für alle $x \in \mathcal{X}$. Diese Funktionen bilden den Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ des Operators, der im Weiteren mit \mathcal{D} bezeichnet wird. Mit der oben genannten Transformation von

u auf $\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{U}} := [-1, 1]$ ergibt sich daraus der folgende infinitesimale Operator \tilde{A}

$$\tilde{A}f(t, x, \tilde{u}) = \left(\frac{1}{2} K^2 \tilde{u}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) + K b \tilde{u} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right) \mathbb{1}_{[0, T) \times (0, 1)} \quad (2.15)$$

für alle $(t, x, \tilde{u}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \tilde{\mathcal{U}}$ und alle $f \in \mathcal{D}$.

Die Martingalformulierung für das Steuerungsproblem liefert damit die folgende Gleichung (2.16) für alle $f \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T} \times \mathcal{X} \times \tilde{\mathcal{U}}} \tilde{A}f(t, x, \tilde{u}) \mu(dt, dx, d\tilde{u}) + f(0, x_0) &= \int_{\mathcal{T}} f(t, 0) \mu_0(dt) + \int_{\mathcal{T}} f(t, 1) \mu_1(dt) + \\ &\quad \int_{\text{int}\mathcal{X}} f(T, x) \mu_T(dx). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dabei sind μ das Maß auf $[0, T) \times (0, 1) \times \tilde{\mathcal{U}}$ und μ_0, μ_1 sowie μ_T die Randmaße für $x = 0, x = 1$ bzw. $t = T = 1$. An diesen Rändern spielt die Steuerung \tilde{u} keine Rolle mehr, deshalb werden μ_0, μ_1 und μ_T als eindimensionale Maße betrachtet, die jeweils bzgl. \tilde{u} über $\tilde{\mathcal{U}}$ aufintegriert sind. Um nun eine Transformation von $\tilde{\mathcal{U}}$ auf das Einheitsintervall $[0, 1]$ zu vermeiden, werden im Weiteren, wie für das Beneš–Hilborn–Problem, getrennte Maße μ_- und μ_+ für $\tilde{u} < 0$ bzw. $\tilde{u} \geq 0$ betrachtet. Bei den Momenten für diese Maße werden die Indizes 0, 1, T , $-$ und $+$ wiederum geklammert und oben geschrieben.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $X_T = 1$ gilt, entspricht in diesem Modell der Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess $\{X_t\}_{t \leq T}$ im Zustand $x = 1$ absorbiert wird. Diese Wahrscheinlichkeit ist gleich $\mu_0^{(1)}$, damit ergibt sich $\max \mu_0^{(1)}$ als Zielfunktion für das lineare Programm.

Betrachtet man nur maximale Ordnungen M und N für die Momente in t bzw. x und schreibt die Gleichungen (2.16) für die Testfunktionen $f_{m,n}(t, x) = t^m x^n$ für $m \leq M$ und $n \leq N$ mit den Momenten der obigen Maße, so ergeben sich die nachfolgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} n(n-1) K^2 \mu_{m,n-2,2}^{(+)} + \frac{1}{2} n(n-1) K^2 \mu_{m,n-2,2}^{(-)} + nbK \mu_{m,n-1,1}^{(+)} - nbK \mu_{m,n-1,1}^{(-)} + \\ m \mu_{m-1,n,0}^{(+)} + m \mu_{m-1,n,0}^{(-)} = \mu_m^{(1)} + \mu_n^{(T)} \quad \text{für } 1 \leq m \leq M, \ 2 \leq n \leq N, \end{aligned}$$

$$bK \mu_{m,0,1}^{(+)} - bK \mu_{m,0,1}^{(-)} + m \mu_{m-1,1,0}^{(+)} + m \mu_{m-1,1,0}^{(-)} = \mu_m^{(1)} + \mu_1^{(T)} \quad \text{für } 1 \leq m \leq M,$$

$$m \mu_{m-1,0,0}^{(+)} + m \mu_{m-1,0,0}^{(-)} = \mu_m^{(0)} + \mu_m^{(1)} + \mu_0^{(T)} \quad \text{für } 1 \leq m \leq M,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} n(n-1) K^2 \mu_{0,n-2,2}^{(+)} + \frac{1}{2} n(n-1) K^2 \mu_{0,n-2,2}^{(-)} + nbK \mu_{0,n-1,1}^{(+)} - nbK \mu_{0,n-1,1}^{(-)} + x_0^n \\ = \mu_0^{(1)} + \mu_n^{(T)} \quad \text{für } 2 \leq n \leq N, \end{aligned}$$

$$bK\mu_{0,0,1}^{(+)} - bK\mu_{0,0,1}^{(-)} + x_0 = \mu_0^{(1)} + \mu_1^{(T)} \quad \text{und}$$

$$1 = \mu_0^{(0)} + \mu_0^{(1)} + \mu_0^{(T)}.$$

Diese Gleichungen bilden, zusammen mit den eindimensionalen Hausdorffbedingungen für die Variablen $\mu_i^{(1)}$, $\mu_i^{(0)}$ und $\mu_j^{(T)}$ sowie den dreidimensionalen Hausdorffbedingungen für die Variablen $\mu_{i,j,k}^{(+)}$ und $\mu_{i,j,k}^{(-)}$, die Nebenbedingungen im linearen Programm. Die Hausdorffbedingungen werden bis zur Ordnung M in der Komponente t , bis zur Ordnung N in der Komponente x und bis zur Ordnung L in der Komponente u berücksichtigt.

2.3.2 Die exakte Lösung und numerische Resultate für das lineare Programm

Für dieses Problem der Portfoliooptimierung sind für den Fall, dass die Steuerung u_t nicht nach unten oder oben beschränkt ist, die optimale Wertfunktion v und eine optimale Steuerung u_t^* bekannt (vgl. [32] für eine diskrete Version und Theorem 2.6.4 in [27] für den stetigen Fall).

Satz 2.1 :

Für einen Startwert $x_0 \in (0, 1)$ ist

$$v(x_0) = \Phi\left(\Phi^{-1}(x_0) + b\sqrt{T}\right). \quad (2.17)$$

Eine optimale Steuerung u_t^* ist

$$u_t^* = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \varphi(\Phi^{-1}(X_t^*)) \quad \text{für } t < T, \quad (2.18)$$

wobei X_t^* der zugehörige Wertprozess ist und die Gleichung

$$X_t^* = \begin{cases} \Phi\left(\frac{W_t + bt + \sqrt{T}\Phi^{-1}(x_0)}{\sqrt{T-t}}\right) & \text{für } t < T \\ 1 & \text{für } t = T \quad \text{und } W_T + bT \geq -\sqrt{T}\Phi^{-1}(x_0) \\ 0 & \text{für } t = T \quad \text{und } W_T + bT < -\sqrt{T}\Phi^{-1}(x_0) \end{cases} \quad (2.19)$$

erfüllt. Ferner ist $\varphi(x) = (\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-x^2/2}$ die Dichte der Normalverteilung und Φ die zugehörige Verteilungsfunktion.

Bemerkungen:

1. Die in Satz 2.1 angegebene optimale Steuerung u_t^* ist strikt positiv. Sie verhindert die Absorption des Wertprozesses X_t^* an den Punkten 0 und 1 vor dem Endzeitpunkt $T = 1$. Zum Endzeitpunkt nimmt der Wertprozess dann allerdings nur die Werte 0 und 1 an.

2. Wegen des Verhaltens der optimalen Steuerung u_t^* kurz vor dem Endzeitpunkt (es gilt $\lim_{t \rightarrow T} (\sqrt{T-t})^{-1} = \infty$), ist sie als reale Handelsstrategie jedoch ungeeignet.

Mit diesem Ergebnis ist man nun in der Lage, die Güte der numerischen Resultate, die man mit dem LP-Ansatz erhält, zu überprüfen. Dabei muss man allerdings berücksichtigen, dass wegen der Einschränkung der Steuerung auf das Intervall $[-K, K]$ für die Wertfunktion v_K des eingeschränkten Problems gilt

$$v_K(x_0) \leq v(x_0) \quad \text{für alle } x_0 \in \mathcal{X}. \quad (2.20)$$

Die ersten numerischen Resultate sind für die Werte $b = 0.25$ und $x_0 = 0.5$ ermittelt worden. Zunächst ist $K = 1$. Die nachfolgende Tabelle 2.7 enthält neben den Zielfunktionswerten auch jeweils die Massen, die den Maßen μ_+ , μ_- , μ_0 , μ_1 und μ_T zugeordnet werden. Für dieses lineare Programm erfolgt die Formulierung der Hausdorffbedingungen mit den Binomialkoeffizienten, um die Zahl der Variablen und Nebenbedingungen zu reduzieren. Da die realisierbaren Ordnungen L , M und N nicht sehr groß sind, spielen Stabilitätsprobleme an dieser Stelle auch nicht eine solche Rolle wie bei eindimensionalen Problemen.

M	N	L	ZFW	$\mu_{0,0,0}^{(+)}$	$\mu_{0,0,0}^{(-)}$	$\mu_0^{(0)}$	$\mu_0^{(1)}$	$\mu_0^{(T)}$
5	8	3	0.637898	1	0	0	0.637898	0.362102
7	7	7	0.608834	0.955567	0.0444328	0	0.608834	0.391166
8	8	7	0.606850	1	0	0	0.60685	0.39315
10	10	2	0.646428	1	0	0	0.646428	0.353572

Tabelle 2.7: Zielfunktionswerte und Massenverteilung für $b = 0.25$, $x_0 = 0.5$, $K = 1$ und verschiedene Ordnungen M , N und L

Die Rechnung für $M = 8$, $N = 8$ und $L = 7$ benötigt auf einer SUN Ultra 60 ca. 255 Minuten CPU-Zeit, höhere Werte für alle drei Ordnungen gleichzeitig sind nicht mehr in weniger als 24 Stunden CPU-Zeit realisierbar. Für die optimale Steuerung ergibt sich mit Satz 2.1 $v(x_0) = \Phi(\Phi^{-1}(0.5) + 0.25) = \Phi(0.5) \approx 0.5987$ als optimaler Zielfunktionswert bei unbeschränkter Steuerung. Die obigen Werte liegen z.T. verhältnismäßig dicht an diesem Wert. Es müssen jedoch die Ungleichung (2.20) und die Tatsache berücksichtigt werden, dass zunächst nicht bekannt ist, wie groß die Differenz $v(0.5) - v_1(0.5)$ ist.

Wegen der positiven Drift b und des Zielkriteriums kann eigentlich davon ausgegangen werden, dass die Steuerung u nur nichtnegative Werte annehmen kann. Daher überrascht es zunächst, dass nicht für alle Ordnungen $\mu_{0,0,0}^{(-)}$ gleich Null ist. Das erklärt sich aber an dieser Stelle aufgrund der Tatsache, dass die der Steuerung $\tilde{u} = 0$ zugehörige Masse sowohl dem Maß μ_- als auch dem Maß μ_+ zugeordnet werden kann. Die nachfolgende Tabelle 2.8 zeigt die Ergebnisse der Rechnungen wenn man das Maß μ_- in der Modellierung nicht berücksichtigt, d.h. von vornherein $\tilde{u} \in [0, K]$ voraussetzt. Die Ergebnisse stimmen mit denen aus Tabelle 2.7 überein, d.h. die Forderung $u \geq 0$ stellt hier keine Einschränkung dar. Wegen der geringeren Zahl von Variablen und der etwas geringeren Rechenzeit werden alle weiteren Rechnungen mit dieser zusätzlichen Bedingung durchgeführt.

Eine weitere denkbare Möglichkeit ist es, die Ordnungen in den eindimensionalen Hausdorffbedingungen für die Maße μ_0 , μ_1 und μ_T zu erhöhen. Damit erhält man nur geringfügig größere

M	N	L	ZFW	$\mu_{0,0,0}^{(+)}$	$\mu_0^{(0)}$	$\mu_0^{(1)}$	$\mu_0^{(T)}$
5	8	3	0.637898	1	0	0.637898	0.362102
7	7	7	0.608834	1	0	0.608834	0.391166
8	8	7	0.606850	1	0	0.60685	0.39315
10	10	2	0.646428	1	0	0.646429	0.353571

Tabelle 2.8: Zielfunktionswerte und Massenverteilung für $b = 0.25$, $x_0 = 0.5$, $K = 1$ und verschiedene Ordnungen M , N und L bei nichtnegativer Steuerung \tilde{u}

lineare Programme. Obwohl die Zielfunktion lediglich ein Moment des Maßes μ_1 enthält, führt diese Erhöhung jedoch nicht zu einer Verkleinerung des optimalen Zielfunktionswertes.

Nun sind zwei Fragen von Interesse, und zwar, ob die Anwendung der Rücktransformation $R^{(M,N,L)}$ auf die Zahlen $\{\mu_{m,n,l}^{(+)}\}_{m \leq M, n \leq N, l \leq L}$ irgendwelche Rückschlüsse auf die Steuerung \tilde{u}_t zulässt und wie sich die Vergrößerung von K auf die optimalen Zielfunktionswerte auswirkt.

In den nächsten beiden Tabellen 2.9 und 2.10 sind für die Rechnung aus der 2. Zeile in Tabelle 2.8 die Werte der Rücktransformation $R^{(7,7,7)}(\mu^{(+)})_{m,n,l}$ in Ausschnitten angegeben, und zwar für die festen Zeiten $t = 0$, d.h. $m = 0$ in Tabelle 2.9 und $t = 3/7$, d.h. $m = 3$ in Tabelle 2.10. Die Zeilen sind dabei der Komponente n , d.h. den x -Werten und die Spalten der Komponente l bzw. der Steuerung \tilde{u} zuzuordnen.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0.00328601	0	0	0	0
1	0	0	0	0.00199837	0.0104836	0	0	0
2	0	0	0	0	0.0161681	0	0	0
3	0	0	0	0	0.0272083	0	0	0
4	0	0	0	0	0.0260391	0	0	0
5	0	0	0	0	0.0189465	0	0	0
6	0	0	0	0.0172424	0	0	0	0
7	0	0	0.0026393	0	0	0	0	0

Tabelle 2.9: Rücktransformation $R^{(7,7,7)}(\mu^{(+)})_{m,n,l}$ für $m = 0$

Man kann hier nun zumindest eine grobe Vorstellung von der Steuerung \tilde{u}_t bekommen, und zwar wird in der Mitte des Intervalls $\mathcal{X} = [0, 1]$ eine größere Steuerung gewählt als am Rand. Auch für andere Werte von m ergibt sich ein ähnliches Bild, wobei auch dort an einigen Stellen analog zur 2. Zeile in Tabelle 2.9 nicht unmittelbar auf eine stationäre Steuerung \tilde{u}_t geschlossen werden kann, da für mehrere \tilde{u} -Werte Masse zugeordnet wird.

In der folgenden Tabelle 2.11 sind nun für verschiedene obere Schranken K die optimalen Zielfunktionswerte und die Massenverteilung auf die einzelnen Maße angegeben. Für die Steuerung \tilde{u}_t wurde dabei weiterhin $\tilde{u}_t \geq 0$ vorausgesetzt.

Für dieses Beispiel scheitert der LP-Ansatz. Für größere Werte von K bilden sämtliche Gleichungsbedingungen, die sich für die Testfunktionen aus der Gleichung (2.16) ergeben, keine

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0.0421439	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0.00412092	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0.0186138	0
3	0	0	0	0	0	0	0.00560734	0
4	0	0	0	0	0	0	0.0121671	0
5	0	0	0	0	0	0.0190935	0	0
6	0	0	0	0	0.0133624	0	0	0
7	0	0	0	0.0444822	0	0	0	0

Tabelle 2.10: Rücktransformation $R^{(7,7,7)}(\mu^{(+)})_{m,n,l}$ für $m = 3$

K	ZFW	$\mu_{0,0,0}^{(+)}$	$\mu_0^{(0)}$	$\mu_0^{(1)}$	$\mu_0^{(T)}$
5	0.710639	1	0	0.710639	0.289361
10	0.866160	1	0	0.866161	0.133839
20	1	0.699963	0	1	0
100	1	0.139321	0	1	0

Tabelle 2.11: Zielfunktionswerte und Massenverteilung für $b = 0.25$, $x_0 = 0.5$, $M = 7$, $N = 7$, $L = 7$ und verschiedene Grenzen K bei nichtnegativer Steuerung \tilde{u}_t

Einschränkung bzgl. des Zielfunktional $\mu_0^{(1)}$. Der Zielfunktionswert von 1 wird allein durch die Bedingung $\mu_0^{(0)} + \mu_0^{(1)} + \mu_0^{(T)} = 1$ bestimmt. Aus der Lösung des linearen Programmes für $K = 20$ und $K = 100$ müsste man folgern, dass es eine optimale Strategie gibt, mit deren Hilfe man das Niveau 1 mit Wahrscheinlichkeit 1 erreicht. Eine solche Strategie gibt es jedoch nicht.

Auch der Versuch, durch eine Unterteilung von $E \times \mathcal{U}$ zu besseren Ergebnissen zu gelangen, bleibt erfolglos. Das erste Problem ist, dass die Rücktransformation keine brauchbare Information über eine günstige Unterteilung liefert. Das zweite Problem besteht darin, dass auch bei einer willkürlichen Wahl einer Unterteilung stets ein Wert K gefunden werden kann, so dass für alle größeren Werte der optimale Zielfunktionswert im linearen Programm Eins ist.

An dieser Stelle kommen mehrere Probleme zusammen. Zunächst hat man es hier mit einem dreidimensionalen Problem zu tun, für das man die Ordnungen der Momente nicht besonders groß wählen kann. Dann ist für dieses Beispiel die optimale Steuerung u_t^* für t dicht bei T sehr sensitiv, so dass man sehr große Schwierigkeiten haben wird, den Träger von $\mu^{(+)}$ zu identifizieren. Und schließlich hat man bei allen Steuerungsproblemen die Situation, dass die Testfunktionen f auf E definiert sind, und damit stets von kleinerer Dimension als der Raum $E \times \mathcal{U}$ sind. Damit lassen sich nur deutlich weniger Gleichungsnebenbedingungen formulieren als für ein Stoppproblem mit der Dimension von $E \times \mathcal{U}$.

Zusammenfassend kann man sagen, dass der LP-Ansatz sich auch auf eine Reihe von Steuerungsproblemen übertragen lässt. Die Resultate, die man mit den linearen Programmen erhält, sind jedoch mit großer Vorsicht zu betrachten. Sie können sehr genau und korrekt sein und die Identifikation der optimalen Steuerung ermöglichen wie für das modifizierte Beneš-Hilborn Problem mit $\lambda \leq 5.55471$. Es gibt Fälle, noch wo brauchbare Näherungen für die Wertfunktion v

gewonnen werden können, die Steuerung aber nicht mehr sicher identifiziert werden kann. Dafür ist das modifizierte Beneš–Hilborn Problem mit $\lambda > 5.55471$ ein Beispiel. Und zuletzt gibt es Situationen, in denen die Ergebnisse völlig unbrauchbar sind.

Es empfiehlt sich also nicht, alleine den LP-Ansatz zur Lösung eines stochastischen Steuerungsproblem es heranzuziehen. Vielmehr sollte er in Kombination mit anderen Lösungsverfahren oder zur Verifikation einer optimalen Steuerung genutzt werden. Im Übrigen treffen auch hier viele der Schlussbemerkungen zu Stoppproblemen aus dem Abschnitt 1.8 zu.

Anhang A

AMPL-Files für die Verfeinerung des Einführungsbeispiels

Hinweis: Die Bezeichnungen in den Quellfiles stimmen nicht in allen Fällen mit den Bezeichnungen im Text überein. Die Bedeutung der Variablen und Parameter wird in den Kommentaren genannt.

Das Modell-File

```
#
# stoppenntit.mod
# Stop-Problem auf [0,1]
# Stand: 13.6.00
#
# Es wird an A Punkten geteilt. Es werden die Hausdorffbedingungen mit
# iterierten Differenzen verwendet
#

#
# 1. Hier werden die Standardwerte fuer die Modellparameter festgelegt
#

param A default 3 ;      # Anzahl der echten Teilungspunkte

param N default 20 ;     # hoechstes Moment in Gleichungsnebenbedingungen
param N1 default 20 ;    # hoechstes Moment in Hausdorffbedingungen N1<=N
param M default 20 ;     # Ordnung der Ruecktransformation M<=N

param x0 default 0.3 ;   # Startpunkt des Prozesses

param r {0..A+1} ;       # Werte der Teilungspunkte
                        # (werden im DAT-File uebergeben)
```

```

param ind {k in 1..A+1} # Indikator ueber Lage des Startpunktes
:=
    if (r[k-1] <= x0 and x0 < r[k]) then 1 else 0 ;

# Definition der Binomialkoeffizienten:

param bin {n in 0..N, k in 0..n} :=
    (if (k=0 or k=n) then 1 else bin[n-1,k] + bin[n-1,k-1]) ;

#
# 2. Hier werden die einzelnen Mengen definiert
#

set I := 0..N ;      # Index i bezeichnet die Momente
set I2 := 2..N ;     #
set K := 1..A+1 ;    # Index k bezeichnet die Nummer des Teilintervalls

#
# 3. Hier werden die Variablen definiert
#

# 3.1. m[0,i] bezeichnet das i-te Moment des Aufenthaltsmaszses auf dem
# Intervall [0,1]:

var m {0..N-2, 0..N-2} ;

# 3.2. n[i,k] bezeichnet das i-te Moment der Verteilung auf dem
# Intervall [r[k-1],r[k]] zum Stopzeitpunkt.
# Als Startwerte fuer n sind die Werte gewaehlt, die einer
# "Sofort Stoppen" - Strategie entsprechen:

var n {i in I, k in K}
    := ind[k]*x0^i ;

# 3.3. ns[0,i,k] bezeichnet das i-te Moment der vom Intervall
# [r[k-1],r[k]] auf [0,1] transformierten Verteilung:

var ns {j in I, i in I, k in K} ;

#
# 4. Hier ist die Zielfunktion
#

maximize perform_index:
    sum{k in K} (n[0,k] - 9*n[1,k] + 59*n[2,k] - 100*n[3,k] + 50*n[4,k]) ;

#
# 5. Hier beginnen die Nebenbedingungen
#

```

```

# 5.1. Zusammenhang von ns[.,.] und n[.,.]

subject to transf {i in I, k in K}:
ns[0,i,k] = (1/(r[k]-r[k-1])^i)*
  (sum {i1 in 0..i} (n[i1,k]*(-r[k-1])^(i-i1)*bin[i,i1])) ;

# 5.2. Das Masz zum Stopzeitpunkt ist ein Wahrscheinlichkeitsmasz

subject to probability:
sum {k in K} n[0,k] = 1 ;

# 5.3. Definition der iterierten Differenzen

subject to diff_m {i in 1..N-2, j in 0..(N-2-i) }:
m[i,j] = m[i-1,j+1] - m[i-1,j] ;

subject to diff_ns {i in 1..N, j in 0..(N-i), k in K }:
ns[i,j,k] = ns[i-1,j+1,k] - ns[i-1,j,k] ;

# 5.4. Hausdorffbedingungen

subject to diffineq_m_b {i in 0..N1-2, j in 0..(N1-2-i)}:
(-1)^i * m[i,j] >= 0 ;

subject to diffineq_ns_b {i in I, j in 0..(N1-i), k in K}:
(-1)^i * ns[i,j,k] >= 0 ;

# 5.5. Diese Gleichungen beschreiben die Entwicklung des Prozesses

subject to prozess {i in I2}:
(sum{k in K} n[i,k]) - (i*(i-1)/2)*m[0,i-2] = x0^i ;

subject to prozess_1:
sum{k in K} n[1,k] = x0 ;

```

Das Daten-File

Im Datenfile werden die Teilungspunkte s_i , ($1 \leq i \leq m+1$) (hier \mathbf{r}) übergeben. Dabei sind die veränderten Indizes zu berücksichtigen. Die im AMPL-Modellfile verwendete Variable A entspricht $m-1$ und muss vor dem Einlesen des Datenfiles auf 4 gesetzt werden.

```

param: r:=
0 0
1 0.05
2 0.4
3 0.55
4 0.95
5 1 ;

```

Anhang B

AMPL-Modellfile für die Modifikation im Cox–Ingersoll–Ross Modell

```
#
# zinsmod.mod
# Stop-Problem fuer Zinsprozess auf [r,1] mit zusaetzlichen Testfunktionen
# Stand: 10.10.00
#
# Es wird an A Punkten geteilt. Der erste echte Teilungspunkt muss dabei dem
# linken Rand r_1 entsprechen. Fuer das Intervall [0,r_1) wird verlangt, dass
# dort keine Masse liegt. Es werden die Teilmasze fuer das Aufenthaltsmasz
# und das Stoppmasz betrachtet.
#
# Es werden die Hausdorffbedingungen mit iterierten Differenzen verwendet.
#

#
# 1. Hier werden die Standardwerte fuer die Modellparameter festgelegt
#

param A default 4 ;      # Anzahl der echten Teilungspunkte

param N default 20 ;      # hoechstes Moment in Gleichungsnebenbedingungen
param N1 default 20 ;     # hoechstes Moment in Hausdorffbedingungen N1<=N
param M default 20 ;      # Ordnung der Ruecktransformation M<=N

param x0 default 0.3 ;    # Startpunkt des Prozesses

param r {0..A+1} ;        # Werte der Teilungspunkte
                           # (werden im DAT-File uebergeben)

param b default -1 ;
param a default 1 ;        # Driftparameter ( a > 0 )
```

```

param sig default 1 ;      # Diffusionsparameter ( sig > 0 )

param ind {k in 1..A+1} # Indikator ueber Lage des Startpunktes
:=
  if (r[k-1] <= x0 and x0 < r[k]) then 1 else 0 ;

param ind1 {k in 1..A+1} # weiterer Indikator ueber Lage des Startpunktes
:=
  if (r[k-1] <= x0) then 1 else 0 ;

# Definition der Binomialkoeffizienten:

param bin {n in 0..N, k in 0..n} :=
  (if (k=0 or k=n) then 1 else bin[n-1,k] + bin[n-1,k-1]) ;

#
# 2. Hier werden die einzelnen Mengen definiert
#

set I := 0..N ;      # Index i bezeichnet die Momente
set I2 := 2..N ;

set K := 1..A+1 ;    # Index k bezeichnet die Nummer des Teilintervalls

#
# 3. Hier werden die Variablen definiert
#

# 3.1. m[i,k] bezeichnet das i-te Moment des Aufenthaltsmaszses auf dem
# Intervall [r[k-1],r[k]]:

var m {I,K} ;

# 3.2. ms[0,i,k] bezeichnet das i-te Moment der vom Intervall
# [r[k-1],r[k]] auf [0,1] transformierten Verteilung.

var ms {I,I,K} ;

# 3.3. n[i,k] bezeichnet das i-te Moment der Verteilung auf dem
# Intervall [r[k-1],r[k]] zum Stopzeitpunkt:
# Als Startwert fuer n sind die Werte gewaehlt, die einer
# "Sofort Stoppen" - Strategie entsprechen:

var n {i in I, k in K} := ind[k]*x0^i ;

# 3.4. ns[0,i,k] bezeichnet das i-te Moment der vom Intervall
# [r[k-1],r[k]] auf [0,1] transformierten Verteilung.

var ns {I,I,K} ;

```

```

#
# 4. Hier ist die Zielfunktion
#

maximize perform_index:
    sum{k in K} (n[2,k] - n[3,k]) ;

#
# 5. Hier beginnen die Nebenbedingungen
#

# 5.1. Zusammenhang von ns[.,.,.] und n[.,.]

subject to transf_n {i in I, k in K}:
    ns[0,i,k] = (1/(r[k]-r[k-1]))^i*
        (sum {i1 in 0..i} (n[i1,k]*(-r[k-1])^(i-i1)*bin[i,i1])) ;

# 5.2. Zusammenhang von ms[.,.,.] und m[.,.]

subject to transf_m {i in I, k in K}:
    ms[0,i,k] = (1/(r[k]-r[k-1]))^i*
        (sum {i1 in 0..i} (m[i1,k]*(-r[k-1])^(i-i1)*bin[i,i1])) ;

# 5.3. Das Masz zum Stopzeitpunkt ist ein Wahrscheinlichkeitsmasz

subject to probability:
    sum {k in K} n[0,k] = 1 ;

# 5.4. Definition der iterierten Differenzen

subject to diff_ms {i in 1..N, j in 0..(N-i), k in K}:
    ms[i,j,k] = ms[i-1,j+1,k] - ms[i-1,j,k] ;

subject to diff_ns {i in 1..N, j in 0..(N-i), k in K}:
    ns[i,j,k] = ns[i-1,j+1,k] - ns[i-1,j,k] ;

# 5.5. Haussdorffbedingungen

subject to diffineq_m_b {i in 0..N1, j in 0..(N1-i), k in K}:
    (-1)^i * ms[i,j,k] >= 0 ;

subject to diffineq_ns_b {i in 0..N1, j in 0..(N1-i), k in K}:
    (-1)^i * ns[i,j,k] >= 0 ;

# 5.6. Diese Gleichungen beschreiben die Entwicklung des Prozesses

subject to prozess {i in I2}:
    (sum{k in K} n[i,k]) - (sum{k in K} (sig^2*i*(i-1)/2)*m[i-1,k])
        + (sum{k in K} b*i*m[i,k]) - (sum{k in K} a*i*m[i-1,k]) = x0^i ;

```

```

subject to prozess_1:
    (sum{k in K} n[1,k]) + (sum{k in K} b*m[1,k]) -
    (sum{k in K} a*m[0,k]) = x0 ;

subject to prozessmod {i in 3..N, l in 2..A}:
    sum{j in 0..i}(bin[i,j]*(-r[l])^(i-j)*(sum{k in l+1..A+1} n[j,k]))
    - (sig^2*i*(i-1)/2)*sum{j in 0..i-2}
    (bin[i-2,j]*(-r[l])^(i-2-j)*(sum{k in l+1..A+1} m[j+1,k])) +
    b*i*sum{j in 0..i-1}
    (bin[i-1,j]*(-r[l])^(i-1-j)*(sum{k in l+1..A+1} m[j+1,k])) -
    a*i*sum{j in 0..i-1}
    (bin[i-1,j]*(-r[l])^(i-1-j)*(sum{k in l+1..A+1} m[j,k]))
    = ind1[l+1]*(x0-r[l])^i ;

# 5.7. Vor dem ersten Teilungspunkt liegt keine Masse

subject to links_n {i in I}:
    n[i,1] = 0 ;

subject to links_m {i in I}:
    m[i,1] = 0 ;

```


Anhang C

MATLAB-File zur Lösung des Neumannproblems

Dieser Anhang enthält das MATLAB-File für die Lösung des zweidimensionalen Neumannproblems aus Abschnitt 1.8.1 mit der PDE-Toolbox.

Bemerkung : An die im nachfolgenden Quelltext mit den Zeichen `\\` endenden Zeilen muss im MATLAB-Quelltext die nachfolgende Zeile ohne Zwischenraum und unter Weglassung der Zeichen `\\` angefügt werden. Die Trennung erfolgt hier nur aus Platzgründen und hat in MATLAB eine Fehlermeldung zur Folge.

```
function pdemodel
[pde_fig,ax]=pdeinit;
pdetool('appl_cb',1);
pdetool('snaon','on');
set(ax,'DataAspectRatio',[1 1 1]);
set(ax,'PlotBoxAspectRatio',[1.5 1 1]);
set(ax,'XLim',[-1.5 1.5]);
set(ax,'YLim',[-1 1]);
set(ax,'XTickMode','auto');
set(ax,'YTickMode','auto');

% Beschreibung des Randbereiches:
pdirect([0 1 1 0],'R1');
pdeellip(0.5,0.5,0.1527,0.1527,0,'E1');
set(findobj(get(pde_fig,'Children'),'Tag','PDEEval'),'String','R1-E1')

% Randbedingungen:
pdetool('changemode',0)
pdesetbd(8,'neu',1,'0',...
'(-1)./sqrt((x-0.5).^2+(y-0.5).^2).*((x-0.5).*(-9+118*x-300*x.^2+200*x.^3).* \\
(1-9*y+59*y.^2-100*y.^3+50*y.^4)+(y-0.5).*(1-9*x+59*x.^2-100*x.^3+50*x.^4).* \\
(-9+118*y-300*y.^2+200*y.^3))')
pdesetbd(7,'neu',1,'0',...
'(-1)./sqrt((x-0.5).^2+(y-0.5).^2).*((x-0.5).*(-9+118*x-300*x.^2+200*x.^3).* \\
```

```

(1-9*y+59*y.^2-100*y.^3+50*y.^4)+(y-0.5).*(1-9*x+59*x.^2-100*x.^3+50*x.^4).* \
(-9+118*y-300*y.^2+200*y.^3))')
pdesetbd(6,'neu',1,'0',...
'(-1)./sqrt((x-0.5).^2+(y-0.5).^2).*((x-0.5).*(-9+118*x-300*x.^2+200*x.^3).* \
(1-9*y+59*y.^2-100*y.^3+50*y.^4)+(y-0.5).*(1-9*x+59*x.^2-100*x.^3+50*x.^4).* \
(-9+118*y-300*y.^2+200*y.^3))')
pdesetbd(5,'neu',1,'0',...
'(-1)./sqrt((x-0.5).^2+(y-0.5).^2).*((x-0.5).*(-9+118*x-300*x.^2+200*x.^3).* \
(1-9*y+59*y.^2-100*y.^3+50*y.^4)+(y-0.5).*(1-9*x+59*x.^2-100*x.^3+50*x.^4).* \
(-9+118*y-300*y.^2+200*y.^3))')
pdesetbd(4,'dir',1,'1',...
'(1-9*x+59*x.^2-100*x.^3+50*x.^4).*(1-9*y+59*y.^2-100*y.^3+50*y.^4)')
pdesetbd(3,'dir',1,'1',...
'(1-9*x+59*x.^2-100*x.^3+50*x.^4).*(1-9*y+59*y.^2-100*y.^3+50*y.^4)')
pdesetbd(2,'dir',1,'1',...
'(1-9*x+59*x.^2-100*x.^3+50*x.^4).*(1-9*y+59*y.^2-100*y.^3+50*y.^4)')
pdesetbd(1,'dir',1,'1',...
'(1-9*x+59*x.^2-100*x.^3+50*x.^4).*(1-9*y+59*y.^2-100*y.^3+50*y.^4)')

% Erzeugung des Gitters:
setupprop(pde_fig,'Hgrad',1.3);
setupprop(pde_fig,'refinemethod','regular');
pdetool('initmesh')
pdetool('refine')

% Koeffizienten der partiellen Differentialgleichung:
pdeseteq(1,'1','0.0','0.0','1.0','0:10','0.0','0.0','[0 100]')
setupprop(pde_fig,'currparam',['1 ','0.0';'0.0';'1.0'])

% Parameter fuer die Loesung und die Grafiken:
setupprop(pde_fig,'solveparam',str2mat('0','1908','10','pdeadworst',...
'0.5','longest','0','1E-4','','fixed','Inf'))
setupprop(pde_fig,'plotflags',[1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1]);
setupprop(pde_fig,'colstring','');
setupprop(pde_fig,'arrowstring','');
setupprop(pde_fig,'deformstring','');
setupprop(pde_fig,'heightstring','');

% Loesung der partiellen Differentialgleichung:
pdetool('solve')

```

Symbolverzeichnis

- A infinitesimaler Generator, 9
- A^* adjungierter Operator, 10
- $A_k^{(i,j)}$, 18
- $A^{\tilde{u}}$ infinitesimaler Operator, 84
- $a^{(i,j)}$, 17
- α Vergleichswert, 89
- $B(E \times \mathcal{U})$, 87
- B Koeffizientenmatrix, 28
- $B_k^{(i)}$, 18
- $B_{n,u}$ Bernsteinpolynom, 35, 65
- $\mathcal{B}(E)$, 9
- $b^{(i)}$, 17
- $C_b(\mathbb{R}^N)$, 16
- $\bar{C}_b(E)$, 84
- $\triangle \mu_i$ iterierte Differenz, 23
- $\triangle^n \mu_i$ iterierte Differenz n -ter Ordnung, 23
- $\triangle_1 \triangle_2 \mu_{i,j}$, 24
- $\triangle_1^l \triangle_2^m \mu_{i,j}$, 24
- $\triangle_1^{j_1} \dots \triangle_N^{j_N} \mu_{n_1, \dots, n_N}$, 24
- δ_{x_0} Dirac-Maß, 10
- E Zustandsraum, 9, 84
- E_j^μ , 41
- $E_j^{\mu_\tau}$, 41
- \mathbf{E}_x , 9
- η bedingte Verteilung von u , 85
- F Fortsetzungsbereich, 15
- F_{x_0} lokaler Fortsetzungsbereich, 15
- G Zielgewinnfunktion, 10
- g_{i_1, \dots, i_N} , 17
- \mathcal{H}_n Hausdorffpolytop der Ordnung n , 37
- \mathcal{H}_n^N N -dimensionales Hausdorffpolytop der Ordnung n , 66
- I Zeitintervall, 9
- \mathbf{I} Indexmenge, 26
- L_E^x Austrittszeit, 9
- \mathbf{M} maximale Ordnung, 27
- $\mathcal{M}(E)$, 10
- \mathcal{M}_∞ Momentenraum, 37
- \mathcal{M}_∞^N N -dimensionaler Momentenraum, 66
- \mathcal{M}_n Momentenraum der Ordnung n , 37
- \mathcal{M}_n^N N -dimensionaler Momentenraum der Ordnung n , 66
- $\mathcal{M}^+(E)$, 10
- μ Aufenthaltsmaß, 11, 84
- $\mu^{(j)}$ Teilmaß von μ , 41
- μ_0 Randverteilung bzgl. x , 85
- μ_1 , 84
- μ_τ Stoppmaß, 11
- $\mu_\tau^{(j)}$ Teilmaß von μ_τ , 41
- $\tilde{\mu}_\tau^{(j)}$, 41
- ν_0 Anfangsverteilung, 84
- $\mathbf{p}^{(n)}$, 36
- $\mathcal{P}(E)$, 10
- Q Verlaufsgewinnfunktion, 10
- q_{i_1, \dots, i_N} , 17
- $R^{(n)}$ Rücktransformation, 36, 66
- S Stoppbereich, 15
- s_i Teilungspunkt, 41
- $\sigma^{(i,j)}$, 17
- \mathcal{T} Zeitintervall, 95
- $\mathfrak{T} = \{T_s\}_{s \geq 0}$ Kontraktionshalbgruppe, 9
- \mathcal{U} Steuerungsraum, 84
- $v_1(x_0)$, 10
- $v_2(x_0)$, 10
- $v_3(x_0)$, 10
- \mathcal{X} , 95

Literaturverzeichnis

- [1] ANDERSON, E.J. and P. NASH: *Linear programming in infinite-dimensional spaces. Theory and applications*. John Wiley & Sons, New York, 1987.
- [2] BAXTER, M.W. and A.J.O. RENNIE: *Financial calculus. An introduction to derivative pricing*. The University Press Cambridge, 1996.
- [3] BELOUSOW, A.: *Eine (virtuelle) Reise durch das Hausdorff-Polytop*. Master's thesis, Institut für Operations Research, Humboldt-Universität zu Berlin, 2000.
- [4] BENEŠ, V.E.: *Girsanov functionals and optimal bang-bang laws for final value stochastic control*. Stoch. Processes Appl., 2:127–140, 1974.
- [5] BENEŠ, V.E., L.A. SHEPP and H.S. WITSENHAUSEN: *Some solvable stochastic control problems*. Stochastics, 4:39–83, 1980.
- [6] BENSOUSSAN, A.: *Current results and issues in stochastic control*. In *Stochastic differential systems. Proceedings of the 3rd Bad Honnef Conference 1985*, volume 78 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 36–88. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [7] BERG, C.: *The multidimensional moment problem and semigroups*. In *Moments in mathematics*, volume 37 of *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, pages 110–124. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1987.
- [8] BHATT, A.G. and V.S. BORKAR: *Occupation measures for controlled Markov processes: Characterisation and optimality*. Ann. Prob., 24(3):1531–1562, 1996.
- [9] CHO, M.J.: *Linear programming formulation for optimal stopping*. PhD thesis, The Graduate School, University of Kentucky, Lexington, 2000.
- [10] CHO, M.J. and R.H. STOCKBRIDGE: *Linear programming formulation for optimal stopping problems*. unveröffentlichtes Preprint, 2000, s. <http://www.uwm.edu/~stockbri/>.
- [11] CHRISTOF, T. and A. LOEBEL: *PORTA – A polyhedron representation transformation algorithm*, Version 1.3.2, 1997. s. <http://www.zib.de/Optimization/Software/Porta/>.
- [12] CHRISTOPEIT, N. and K. HELMES: *On Beneš' bang-bang control problem*. Applied Mathematics and Optimization, 9:163–176, 1982.
- [13] CLARK, J.M.C. and M.H.A. DAVIS: *On „predicted miss“ stochastic control problems*. Stochastics, 2:197–209, 1979.
- [14] DALE, A.I.: *Two-dimensional moment problems*. Math. Scientist, 12:21–29, 1987.
- [15] DUFFIE, D.: *Dynamic asset pricing theory*. Princeton University Press, 2. edition, 1996.

- [16] ELLIOTT, R.J. and P.E. KOPP: *Mathematics of financial markets*. Springer Finance. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [17] ETHIER, S.N. and T.G. KURTZ: *Markov processes: Characterization and convergence*. John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [18] FELLER, W.: *An introduction to probability theory and its applications*, volume II. John Wiley & Sons, New York, 2. edition, 1971.
- [19] FLEMING, W.H. and R.W. RISHEL: *Deterministic and stochastic optimal control*. Springer-Verlag, New York, 1975.
- [20] HAUSDORFF, F.: *Summationsmethoden und Momentenfolgen. I. & II*. Mathematische Zeitschrift, 9:74–109, 280–299, 1921.
- [21] HAUSDORFF, F.: *Momentenprobleme für ein endliches Intervall*. Mathematische Zeitschrift, 16:220–248, 1923.
- [22] HELMES, K., S. RÖHL and R.H. STOCKBRIDGE: *Computing moments of the exit time distribution for Markov processes by linear programming*. erscheint in Operations Research, 49(4), 2001.
- [23] HELMES, K. and R.H. STOCKBRIDGE: *Numerical comparison of controls and verification of optimality for stochastic control problems*. JOTA, 106(1):107–127, 2000.
- [24] HIGHAM, N.J.: *Accuracy and stability of numerical algorithms*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1996.
- [25] HILDEBRANDT, T.H. and I.J. SCHOENBERG: *On linear functional operations and the moment problem for a finite interval in one or several dimensions*. Annals of Mathematics, 34:317–328, 1933.
- [26] ILOG CPLEX DIVISION: *AMPL User guide, including CPLEX directives*, 1999.
- [27] KARATZAS, I.: *Lectures on the mathematics of finance*, volume 8 of *CRM Monograph Series*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1997.
- [28] KNIGHT, F.B.: *Essentials of Brownian motion and diffusion*, volume 18 of *Mathematical surveys*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1981.
- [29] KNILL, O.: *On Hausdorff's moment problem in higher dimensions*. Unveröffentlichtes Preprint, 1997.
- [30] KORN, R.: *Optimal portfolios: Stochastic models for optimal investment and risk management in continuous time*. World Scientific, Singapur, 1997.
- [31] KRYLOV, N.V.: *Controlled diffusion processes*, volume 14 of *Applications of mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1980. Original in russischer Sprache.
- [32] KULLDORFF, M.: *Optimal control of favorable games with a time-limit*. SIAM Journal on Control and Optimization, 31:52–69, 1993.
- [33] KURTZ, T.G.: *Martingale problems for controlled processes*. In *Stochastic modelling and filtering*, volume 91 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 75–90. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

- [34] KURTZ, T.G. and R.H. STOCKBRIDGE: *Existence of Markov controls and characterization of optimal Markov controls*. SIAM Journal on Control and Optimization, 36:609–653, 1998. Erratum 37:1310–1311, 1999.
- [35] KUSHNER, H.J. and DUPUIS P.G.: *Numerical methods for stochastic control problems in continuous time*, volume 24 of *Applications of mathematics*. Springer–Verlag, New York, 1992.
- [36] LIONS, P.L.: *Hamilton–Jacobi–Bellman equations and the optimal control of stochastic systems*. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Warszawa 1983*, volume 2, pages 1403–1417, 1984.
- [37] MANNE, A.S.: *Linear programming and sequential decisions*. Management Science, 6:259–267, 1960.
- [38] THE MATHWORKS, INC.: *Partial differential equation toolbox: User’s guide*, 1995.
- [39] MENDIONDO, M.S. and R.H. STOCKBRIDGE: *Approximation of infinite-dimensional linear programming problems which arise in stochastic control*. SIAM Journal on Control and Optimization, 36:1448–1472, 1998.
- [40] MERTON, R.C.: *Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case*. Review of Economics and Statistics, 51:247–257, 1969.
- [41] MERTON, R.C.: *Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model*. Journal of Economic Theory, 3:373–413, 1971. Erratum 6:213–214, 1973.
- [42] MIZOHATA, S.: *The theory of partial differential equations*. The University Press Cambridge, 1973.
- [43] ØKSENDAL, B.: *Stochastic differential equations. An introduction with applications*. Springer–Verlag, Berlin, 4. edition, 1995.
- [44] SHIRYAYEV, A.N.: *Optimal stopping rules*. Springer–Verlag, New York, 1978.
- [45] SHOHAT, J. and J. TAMARKIN: *The problem of moments*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1. edition, 1943.
- [46] STOCKBRIDGE, R.H.: *Time-average control of martingal problems: A linear programming formulation*. Ann. Prob., 18:206–217, 1990.
- [47] STROOCK, D.W. and S.R.S. VARADHAN: *Multidimensional diffusion processes*. Springer–Verlag, Berlin, 1979.
- [48] TIJMS, H.C.: *Stochastic models. An algorithmic approach*. John Wiley & Sons, New York, 1994.
- [49] WALD, A.: *Sequential analysis*. John Wiley, New York, 1947.
- [50] WOLFE, P. and G.B. DANTZIG: *Linear programming in a Markov chain*. Operations Research, 10:702–710, 1962.
- [51] ZIEGLER, G.M.: *Lectures on polytopes*, volume 152 of *Graduate texts in mathematics*. Springer–Verlag, New York, 1995.

Erklärung

Ich habe außer der angegebenen Literatur keine weiteren Hilfsmittel verwendet und auch von keiner Person Hilfe empfangen.

Ich bezeuge durch meine Unterschrift, dass meine Angaben über die bei der Abfassung meiner Dissertation benutzten Hilfsmittel, über die mir zuteil gewordene Hilfe sowie über frühere Begutachtungen meiner Dissertation in jeder Hinsicht der Wahrheit entsprechen.

Berlin, den 20. März 2001